

PROBLEMAS DE INTERACCION TERRENO-ESTRUCTURA II

1. Introducción.
 2. Deconvolución.
 3. Método directo.
 4. Método de las subestructuras.
 - 4.1. Planteamiento general.
 - 4.2. Formulación de movimientos relativos.
 - 4.3. Formulación con los modos de un sistema asociado.
 - 4.3.1. Modos en base rígida.
 - 4.3.2. Modos con matriz del suelo independiente de la frecuencia.
 5. Comparación de Métodos.
- Referencias

INTERACCION TERRENO-ESTRUCTURA

Alarcón Alvarez, Enrique

1.-- Introducción

En este capítulo se pretende estudiar el efecto combinado de las características elásticas y de inercia del terreno y la estructura sobre él construida.

Desde el punto de vista de esta última, los efectos más llamativos son la alteración de los valores de las frecuencias aparentes, debido justamente a la participación del suelo en el fenómeno vibratorio, y del amortiguamiento general pues, como se vió en el tema correspondiente la radiación de energía y el amortiguamiento propio del suelo tienen unos valores importantes cuando se comparan con los propios de la estructura. Ambos fenómenos tienen lógicamente su reflejo en el valor de las amplitudes del movimiento, que serán distintas de las que se producirían en el caso de base rígida.

El fenómeno era conocido desde antiguo por los constructores de cimentaciones de máquinas y su consideración en otras construcciones se ha producido cuando se ha ido a estructuras singulares como rascacielos, centrales nucleares, etc.

En este sentido los primeros resultados llamativos fueron los presentados por AKINO, OTA y YAMAHARA (1969) donde se comunicaban los resultados obtenidos de la instrumentación de pequeños modelos muy rígidos (Fig.1) de edificios de contención de reactores. Los registros obtenidos en ensayos forzados con vibradores, así como los resultados de pequeños terremotos reales indicaban diferencias apreciables del movimiento del suelo según la cota de observación, con lo que se planteó el problema de elegir cuál debería escogerse para analizar el modelo matemático de la realidad.

Desde entonces han sido numerosísimos los trabajos de investigación del tema; trabajos que, al coincidir con el desarrollo de los nuevos métodos de cálculo, los han usado e impulsado a perfeccionarse.

Paradójicamente el resultado final es la existencia de varias escuelas de pensamiento que, impulsadas por razones extracientíficas, han radicalizado sus diferencias.

Con ello el establecimiento objetivo de un estado del arte actual es realmente difícil como lo prueba la tendencia fluctuante de la normativa -- yankee, al respecto.

2.--Deconvolución

Puesto que los registros de terremotos de que se dispone corresponden a movimientos a nivel de suelo, el primer problema que se plantea consiste en su "deconvolución" a niveles inferiores. El término usado es lógico pues el fenómeno natural consiste en la propagación del temblor desde las zonas profundas y, considerando un cierto estrato, la respuesta de su límite superior se podría obtener a partir de la evolución del inferior haciendo la integral de "convolución" de éste último movimiento con la respuesta al impulso de dicha capa.

La dificultad con la que se tropieza se refiere a la diferente naturaleza de las ondas que se propagan en un medio elástico y a las anisotropías y heterogeneidades, a cualquier suelo real.

El problema se puede simplificar suponiendo que el tipo que se propaga es una onda de distorsión S propagándose verticalmente. En estas condiciones la evolución se realiza como en una viga a cortante, siendo lógica la discretización de la columna de suelo en una serie de elementos de masa concentrada, en un funcionamiento similar al del pórtico a cortante.

Un enfoque analítico muy claro es el presentado por ROESSET (1970, 1978) en un estudio que pretendía estudiar la influencia del terreno en los espectros de respuesta, pero que puede usarse también en el proceso citado.

En efecto, la ecuación del movimiento en un estrato de un medio viscoelástico, homogéneo e isótropo responde a la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad (1)$$

donde

ρ : densidad

G : módulo de rigidez

η : coeficiente de viscosidad

Con el sistema de ejes de la Fig. 1, si se supone un movimiento armóni-

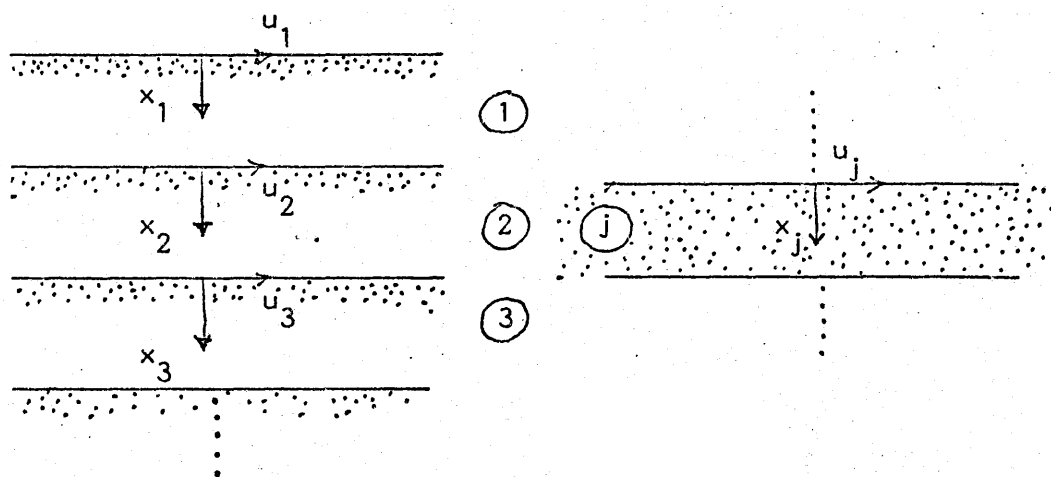


Fig. 1

co en el estrato, de la forma

$$u = U(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

la ecuación (1) se transforma en

$$U'' + \frac{\rho \Omega^2}{G + i \Omega \eta} U = 0 \quad (3)$$

Definiendo

$$p = \frac{\rho \Omega^2}{G + i \Omega \eta} \quad (4)$$

la solución de (3) es

$$U = A \cos p x + B \operatorname{sen} p x = E e^{ipx} + F e^{-ipx} \quad (5)$$

donde las constantes E y F se calculan según las condiciones de contorno.

Estas se refieren a la compatibilidad de movimientos y tensiones en las zonas de contacto que, teniendo en cuenta el sentido de los ejes, se escribirían como

$$U_n = U_{n+1} \quad (6)$$

$$(G_n + i \eta_n \omega) \frac{\partial U_n}{\partial x_n} = (G_{n+1} + i \eta_{n+1} \omega) \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_{n+1}}$$

para la interfase comprendida entre las capas n y $n+1$.

Utilizando 5 estas relaciones se escriben

$$E_n e^{i p_n h_n} + F_n e^{-i p_n h_n} = E_{n+1} + F_{n+1} \quad (7)$$

$$(G_n + i \eta_n \omega) i p_n [E_n e^{i p_n h_n} - F_n e^{-i p_n h_n}] = (G_{n+1} + i \eta_{n+1} \omega) i p_{n+1} [E_{n+1} - F_{n+1}]$$

y definiendo

$$\mu_n = \frac{P_n (G_n + i \eta_n \omega)}{P_{n+1} (G_{n+1} + i \eta_{n+1} \omega)} \quad (8)$$

se obtiene

$$2 E_{n+1} = E_n (1 + \mu_n) e^{i p_n h_n} + F_n (1 - \mu_n) e^{-i p_n h_n}$$

$$2 F_{n+1} = E_n (1 - \mu_n) e^{i p_n h_n} + F_n (1 + \mu_n) e^{-i p_n h_n} \quad (9)$$

Estas fórmulas son las relaciones de recurrencia que se necesitan para el proceso.

En el borde libre $\tau = 0 \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \rightarrow E_1 = F_1$ (10)

$$u_1 = 2E_1 e^{i\Omega t} \quad (11)$$

y procediendo hacia abajo

$$\begin{aligned} 2E_2 &= E_1 \left[(1 + \mu_1) e^{ip_1 h_1} + (1 - \mu_1) e^{-ip_1 h_1} \right] \\ 2F_2 &= E_1 \left[(1 - \mu_1) e^{ip_1 h_1} + (1 + \mu_1) e^{-ip_1 h_1} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Particularizando (5) en el borde superior del estrato 2

$$u_2 = E_1 \left[e^{iph_1} + e^{-iph_1} \right] e^{i\Omega t} \quad (13)$$

Es decir

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{e^{-iph_1} + e^{iph_1}}{2} \quad (14)$$

que sería la función de transferencia del primer estrato. El uso de (9) permite ir progresando hacia adentro y realizar de esta forma la deconvolución en el dominio de la frecuencia. E_1 se determinaría según ello a partir de la transformada de Fourier del acelerograma y con ello se podría obtener la historia sísmica en cualquier profundidad.

El problema se complica por el hecho de que, según se advirtió en capítulos anteriores, tanto el módulo de rigidez como el de amortiguamiento varían con el nivel de deformación. (HARDIN & DRNEVITCH 1972, -- SEED & IDRIS 1970).

Un método corriente consiste en sustituir el análisis no lineal por otro iterativo en el que se ajustan los valores al nivel de deformación mediante las curvas citadas.

Del análisis anterior se deduce que las deformaciones tangenciales en la capa n son

$$r_n(\Omega) = ip_n \left[E_n e^{ip_n x} - F_n e^{-ip_n x} \right] \quad (15)$$

donde, según se advirtió, las x son las profundidades relativas a la cara superior del estrato.

Para la primera capa, por ejemplo

$$\Gamma_1(\Omega) = ip_1 E_1 (e^{ip_1 x} - e^{-ip_1 x}) \quad (16)$$

Para realizar la iteración es típico (SHNABEL et al. 1972) calcular la inversa de $\Gamma_1(\Omega)$ para obtener el valor máximo $\gamma_{\max}(t)$ y a partir de él obtener el valor $\frac{2}{3} \gamma_{\max}(t)$ que se considera representativo del fenómeno. KAUSEL et al. (1976), JAKUB (1977) etc. recomiendan otra regla sencilla que permite realizar la iteración en forma más económica. Se define la deformación tangencial característica mediante

$$\gamma_{ch} = \frac{2}{3} \frac{\text{Aceleración máxima del terremoto dado}}{\text{RMS Aceleración terremoto dado}} \text{RMS}[\gamma] \quad (17)$$

Tanto la aceleración máxima como la RMS del terremoto dado se calculan una sola vez al principio del proceso y $\text{RMS}[\gamma]$ se obtiene directamente a partir de

$$\overline{\gamma^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma^*(\Omega) d\Omega \quad (18)$$

siendo $\Gamma^*(\Omega)$ la densidad espectral de potencia de $\gamma(t)$

$$\text{RMS}[\gamma] = \sqrt{\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\Omega)^2 d\Omega}$$

Sin necesidad de deshacer la transformación, $\Gamma(\Omega)$ se calcula para $x = \frac{1}{2}h_n$.

Existen evidentemente varias limitaciones a este modo de operar (CHRISTIAN 1975) entre las que figuran los fenómenos bi o tridimensionales de propagación y la incertidumbre sobre el significado de una deformación característica que se relaciona directamente con los valores G y η , así como sobre la convergencia o no del método iterativo. De una u otra se siguen utilizando aproximaciones de este corte en los programas habitualmente utilizados en la práctica ingenieril. ELSABEE Y MORRAY (1977) han presentado un valioso estudio en el que se intenta reproducir el efecto tridimensional de la deconvolución. Suponiendo un amortiguamiento histerético del 5% realizaron una comparación para di-

ferentes casos entre los resultados del análisis monodimensional y una malla de elementos finitos tridimensional dotada de contornos absorbentes, proponiendo finalmente como una buena aproximación para la función de transferencia a la base de cimentación, situada a una profundidad E en la primera capa la expresión

$$F_u(\Omega) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_1} & \text{si } f \leq 0.7 f_1 \\ 0.453 & \text{si } f > 0.7 f_1 \end{cases} \quad (19)$$

donde f es la frecuencia en estudio y $f_1 = \frac{c_s}{4E}$ la primera frecuencia de una capa de espesor el del empotramiento del cemento.

Asimismo, Fig.2, hacen notar que la rigidez del cemento introduce un efecto de giro en la base provocado por la rigidez de las paredes; de modo que para reflejar los efectos de la interacción cinemática (cemento sin peso) la deconvolución debe provocar también un giro o pseudorotación para cuyos valores recomienda una función de transferencia

$$F_\phi(\Omega) = \begin{cases} \frac{0.257}{R} (1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_1}) & \text{si } f \leq f_1 \\ \frac{0.257}{R} & \text{si } f > f_1 \end{cases} \quad (20)$$

donde R es el radio del cemento

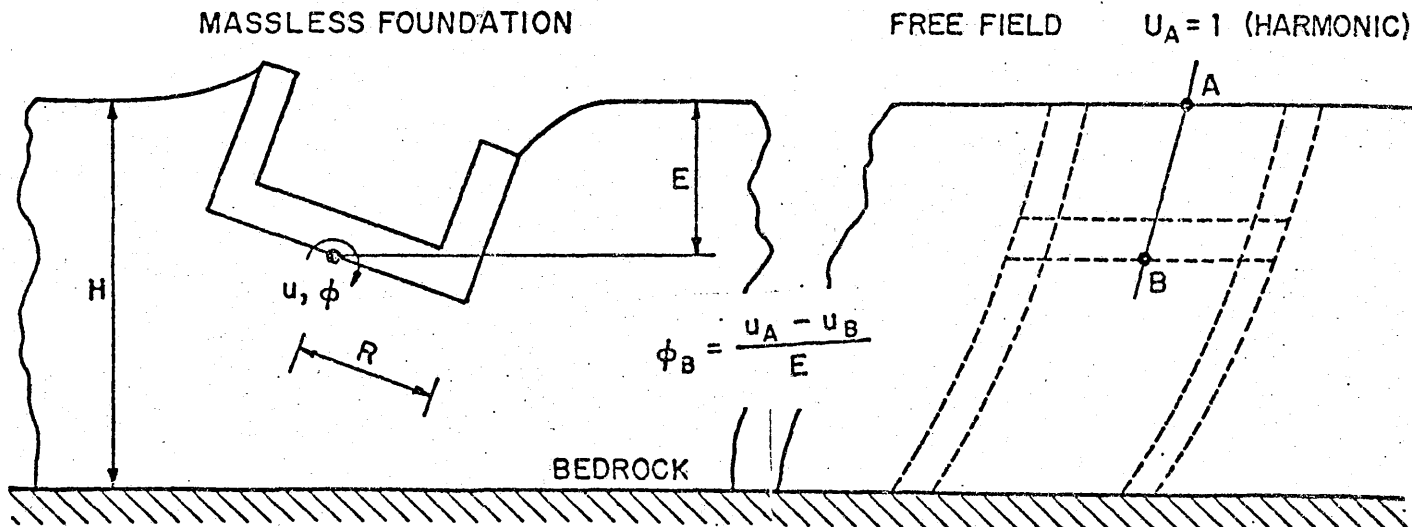


Fig. 2

Algunos programas comerciales de E.F.(vg. FLUSH) llevan incorporados también subrutinas que permiten realizar el proceso de deconvolución

3.--Método Directo

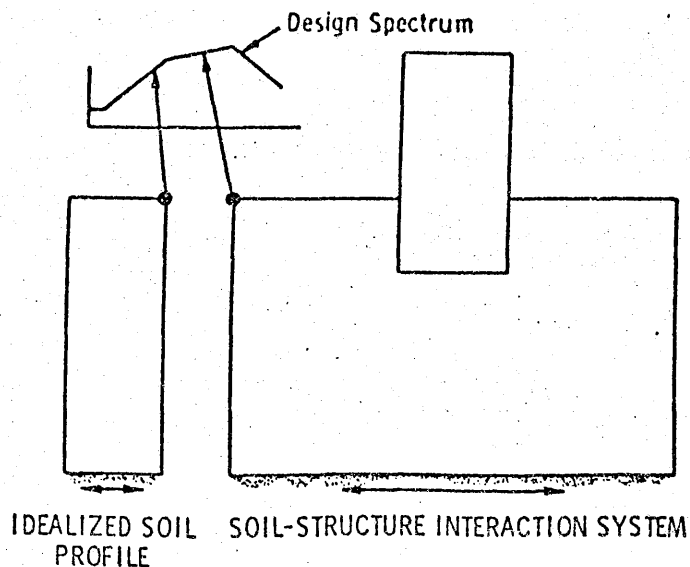
Disponiendo de una potentísima herramienta de cálculo, como es el método de los elementos finitos, se comprende que una forma inmediata de abordar el problema sea la discretización total del conjunto suelo-estructura.

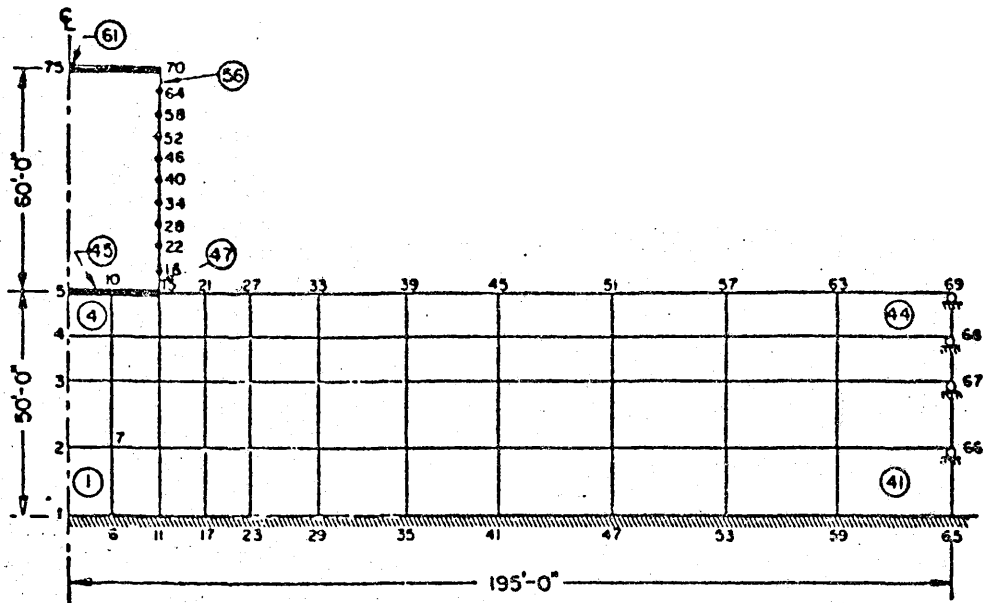
Para ello el primer paso consiste en establecer una discretización de ambos medios, lo que trae consigo algunos problemas. Un ejemplo importante de este tipo de aproximación es el presentado por GHOSH y WILSON (1969). La dificultad principal radica en el truncamiento del medio a una distancia suficientemente grande como para que las ondas reflejadas en el contorno no distorsionen la respuesta real.

Escogida la discretización se realiza la deconvolución del movimiento - hasta la base de la misma mediante el análisis de una columna de suelo con los procedimientos anteriores. Al respecto la Nuclear Regulatory Commission de U.S.A. en su Stomdard Review Plan (SRP) establece las siguientes limitaciones al proceso de deconvolución: (Fig. 3)

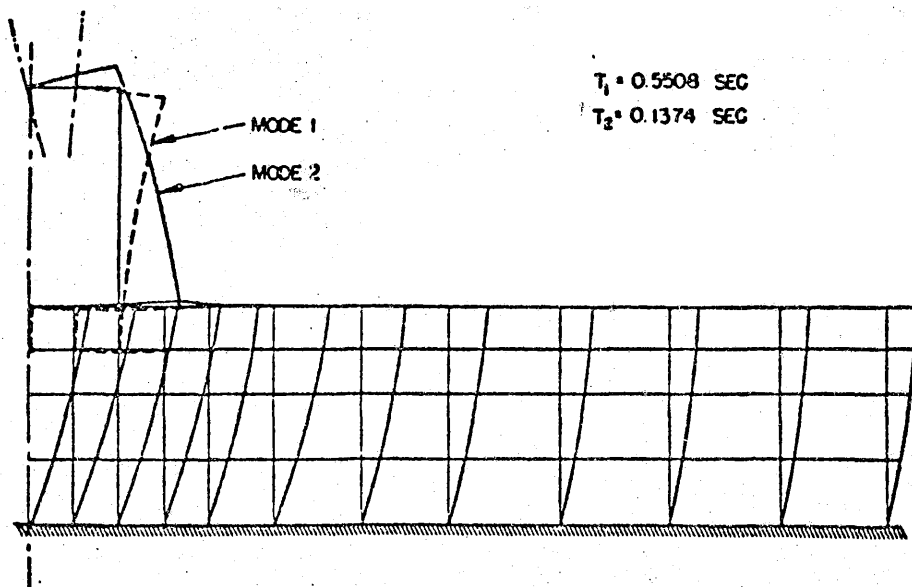
- A.-- Cuando el acelerograma deconvuelto se aplica en la base - del modelo, el espectro a nivel de suelo debe envolver al espectro de diseño establecido por la Regulatory Guide - 1.60.
- B.-- El espectro a nivel del cimiento no debe ser inferior al 60% del espectro de diseño a cualquier frecuencia (entre 2 y 50 cps).
- C.-- Al realizar la deconvolución es preciso tener en cuenta la variación en las propiedades del suelo.

When applied at the base of the idealized soil profile and the soil-structure interaction system, the resulting free field spectrum at the finished grade level should envelope the design response spectrum.





FINITE ELEMENT MODEL FOR THE STRUCTURE-FOUNDATION INTERACTION SYSTEM

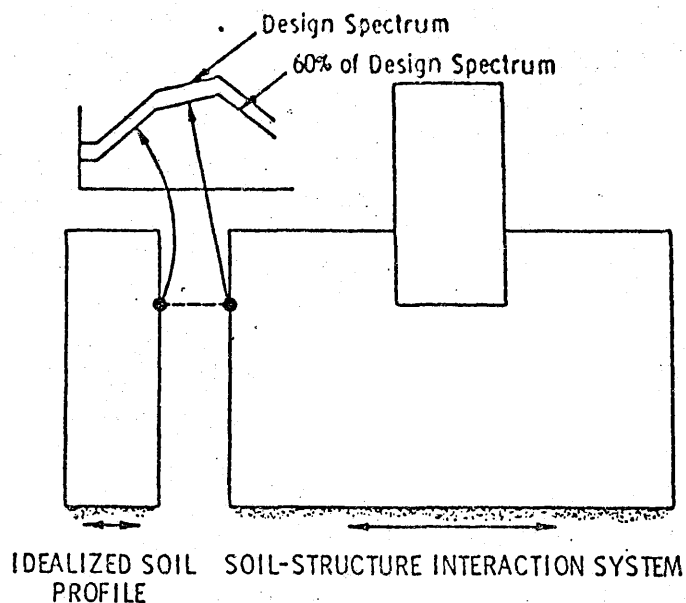


$$T_1 = 0.5508 \text{ SEC}$$

$$T_2 = 0.1374 \text{ SEC}$$

MODE SHAPES OF THE INTERACTING SYSTEM. $V_S = 1500 \text{ FT/SEC}$,
 $T_R = 0.44 \text{ SEC}$, $M_T = M_M = 189,000 \text{ lb-SEC}^2/\text{FT}$

When required by the base of the structure, the resulting time history spectrum at the base of the foundation of the Category I structures, in general, shall not be less than 60% of the design response spectra at any frequency (between .2 to 50 CPS).



No problem in meeting requirement (1). Using SHAKE program a time history compatible with the design spectrum can be specified at the finished grade and a compatible time history can be obtained at the base of the soil profile. As far as the soil-structure interaction system is concerned, using correct modeling and method of analysis, the later part of this requirement also can be easily met.

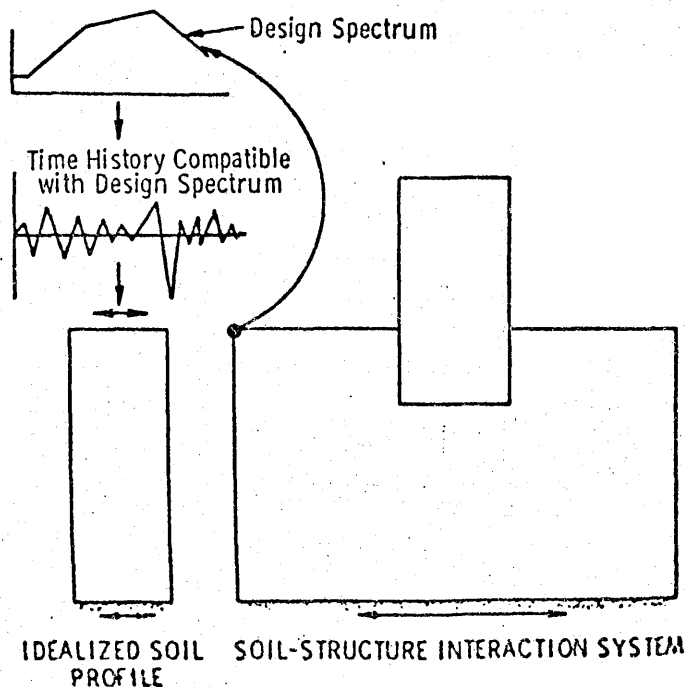
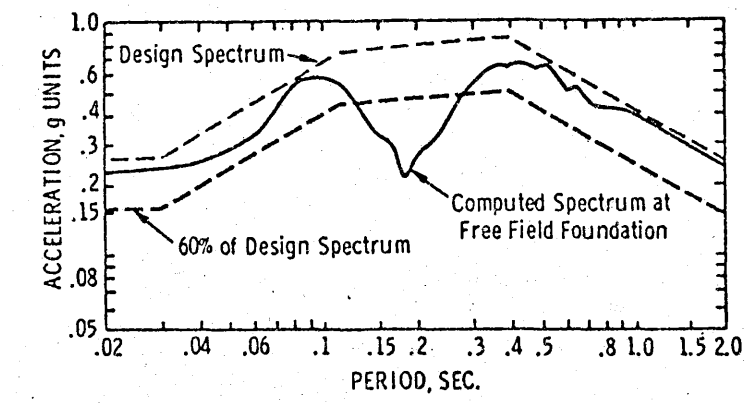
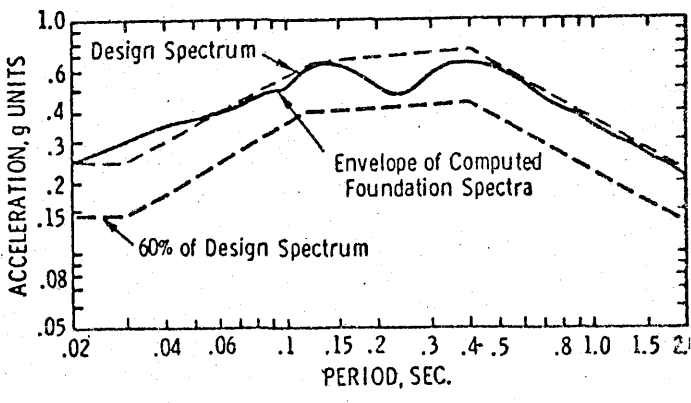


Fig. 3

No existe problema en el cumplimiento de los requisitos A y C, pero como han puesto de manifiesto diferentes autores (AGRAWAL 1975, WHITMAN 1975) el movimiento en la base de la zapata presenta en ciertas zonas unos pozos que impidan el cumplimiento de la B a menos que se recurra a la obtención de una envólvente de los espectros para diferentes clases de terrenos (Fig. 4) lo que automáticamente origina una separación del espectro calculado en superficie .

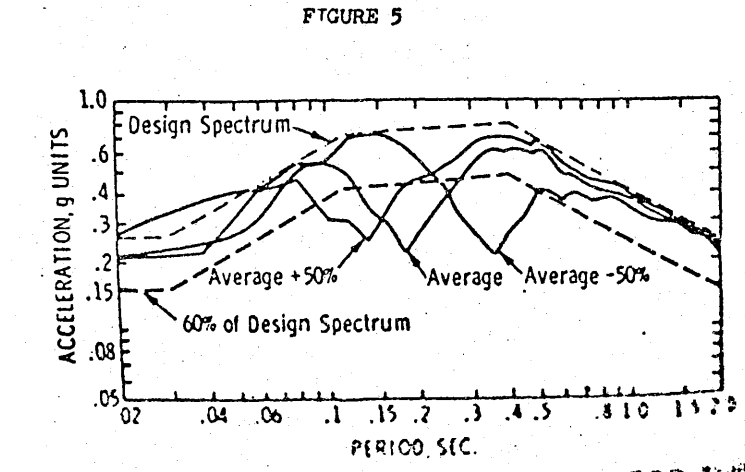


COMPARISON OF DESIGN SPECTRUM AND COMPUTED FREE FIELD FOUNDATION SPECTRUM (5% DAMPING)

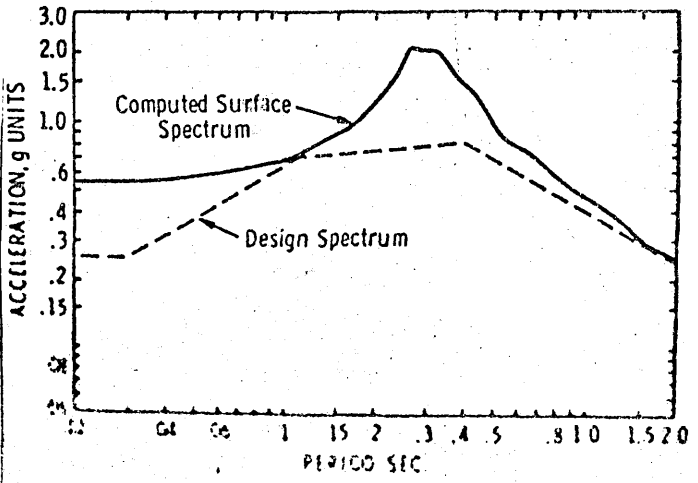


COMPARISON BETWEEN DESIGN SPECTRUM AND ENVELOPE FOUNDATION SPECTRUM

FIGURE 7



FOUNDATION LEVEL RESPONSE SPECTRA FOR THREE SHEAR MODULUS VS STRAIN CURVES (15% DAMPING)



COMPARISON OF DESIGN SPECTRUM AND COMPUTED SURFACE SPECTRUM (15% DAMPING)

Fig. 4

En el artículo citado WHITMAN achaca este efecto, Fig (5) al hecho de utilizar un espectro global (RG 1.60) en lugar de un espectro dependiente del terreno, y aconseja en consecuencia usar este último o bien, di

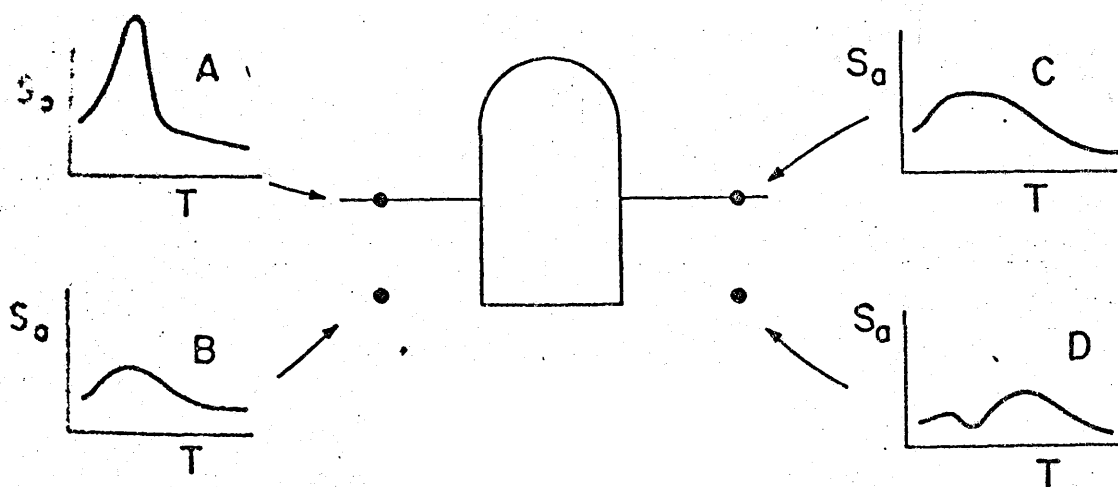


Fig. 5

rectamente, incorporar –sin deconvolución– a la base de la estructura el registro compatible con el espectro lo que nos llevaría a un método indirecto semejante al que expondremos en el apartado siguiente.

A partir de este momento el análisis sigue los esquemas normales. A este esquema (Fig. 6) pertenecen la serie de programas, LUSH, ALUSH Y FLUSH desarrollados por el equipo del Prof. LYSMER

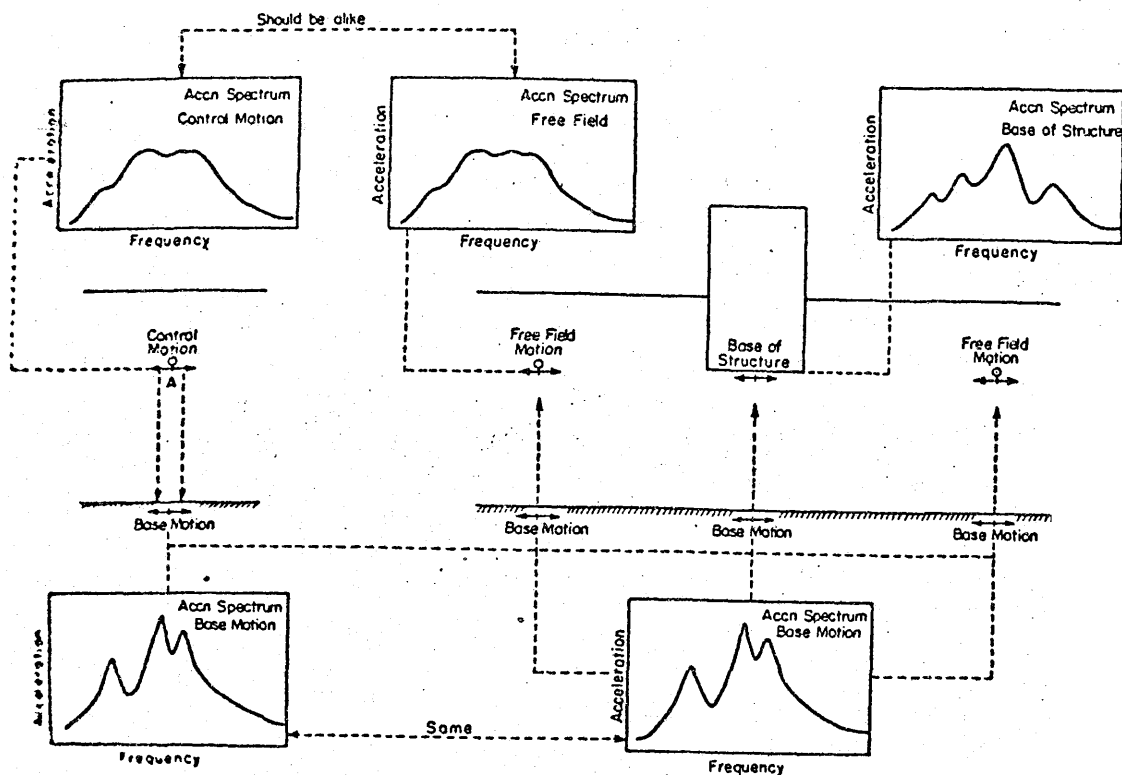


Fig. 6a) Finite Element Model of Soil-Structure System

b) Finite Element Model of Soil-Structure System

Fig. 6a) and b) REPRESENTATION OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS USING FINITE ELEMENT MODEL

<u>Analysed Ground Motion</u>	<u>Structure-Soil Geometry</u>	<u>Soil Conditions</u>
Vertically propagating body waves.	3-dimensional axi-symmetric systems with extensive soil deposit (Berger, 1975; Berger et al, 1975).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.
Vertically propagating body waves.	3-dimensional axi-symmetric systems with transmitting boundaries to represent extensive soil deposits (Kausel & Roesset, 1974).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.
Vertically propagating body waves.	3-dimensional systems with multiple buildings having approximately the same lateral dimension and lying within elongated strip in plan (Lysmer et al, 1975; Hwang et al, 1975).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.
Vertical propagating body waves.	2-dimensional plane-strain systems with extensive soil deposit or with transmitting boundaries to represent extensive soil deposit (Lysmer et al, 1974; Seed et al, 1975).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.
Vertical propagating body waves travelling along horizontal base.	2-dimensional plane strain systems with extensive soil deposit (Udaka, 1975; Udaka et al, 1975).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.
Horizontally propagating waves of specified form on one vertical section.	2-dimensional plane strain systems with extensive soil deposit (Isenberg, 1970).	Layered soil systems having any distribution of moduli and material damping simulating non-linear behavior.

Fig. 6

En ellos, siguiendo la filosofía del programa "SHAKE"; se trabaja en frecuencia mediante el método iterativo de ajuste de las características de los elementos a las curvas de SEED e IDRISS. En el programa LUSH el análisis es plano y en el ALUSH axisimétrico.

Tras diversos análisis se observó que la respuesta de ambos programas era cualitativamente parecida achacándose las diferencias al diferente comportamiento tridimensional de la estructura y al amortiguamiento normal al plano de estudio, lo que motivó el desarrollo del FLUSH en el que el amortiguamiento de radiación es tenido en cuenta mediante (Fig. 7) amortiguadores normales al plano en estudio. La idea es semejante a la que llevó a LYSMER en 1966 a la analogía del semiespacio, tal como se dijo en el capítulo correspondiente.

Por si fuera poco, para reducir el tamaño a emplear se han introducido también los contornos absorbentes de WAAS (1972) y KAUSEL (1974) que equivalen a elementos finitos "infinitos", con lo que la discretización se limita a la zona inmediata al cuerpo en estudio (Fig. 8)

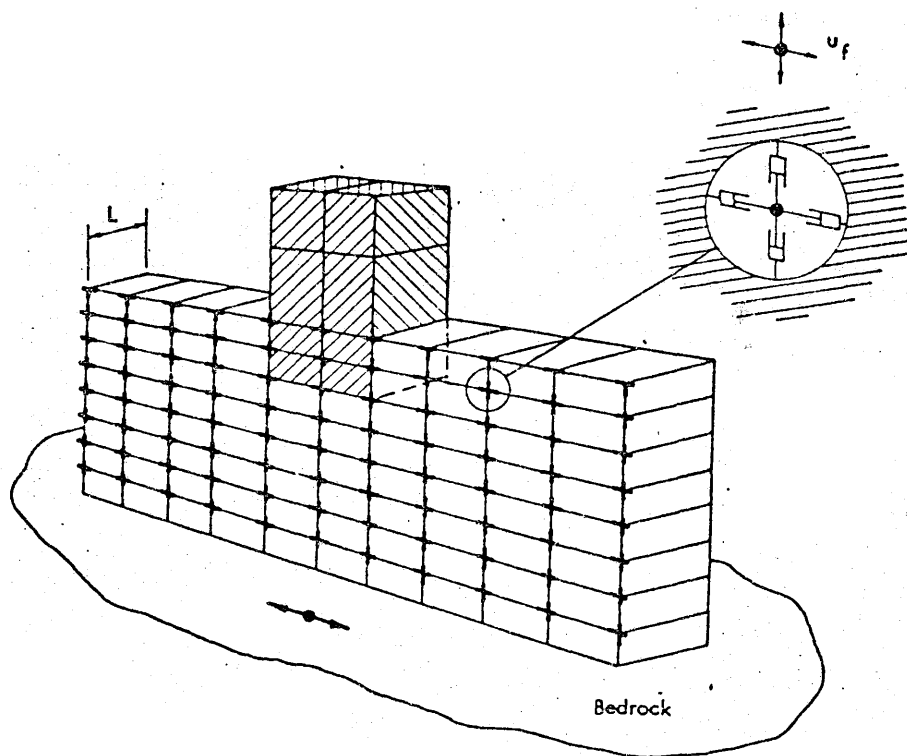


Fig. 7

Las hipótesis del FLUSH son pues:

- 1.- Dentro de la laja en estudio no hay desplazamientos normales al plano de la laja.
- 2.- Los desplazamientos dentro del plano de la laja son iguales en todos los puntos de la normal al mismo.
- 3.- Los efectos de la masa de suelo fuera de la laja pueden simularse mediante los citados amortiguamientos viscosos.

En virtud de la hipótesis 1 las ondas P en dirección normal serán de poca importancia y por ello las tensiones tangenciales en las caras de la laja se aproximan con

$$\tau = -2 \rho c_s (\dot{\delta} - \dot{\delta}_f) \quad (2.1)$$

donde δ es la velocidad vertical u horizontal y $\dot{\delta}_f$ la correspondiente velocidad "en campo abierto" que debe restarse debido a que la onda propagada según z solo se debe a la interacción (el 2 aparece por la existencia de las dos caras de la rebanada).

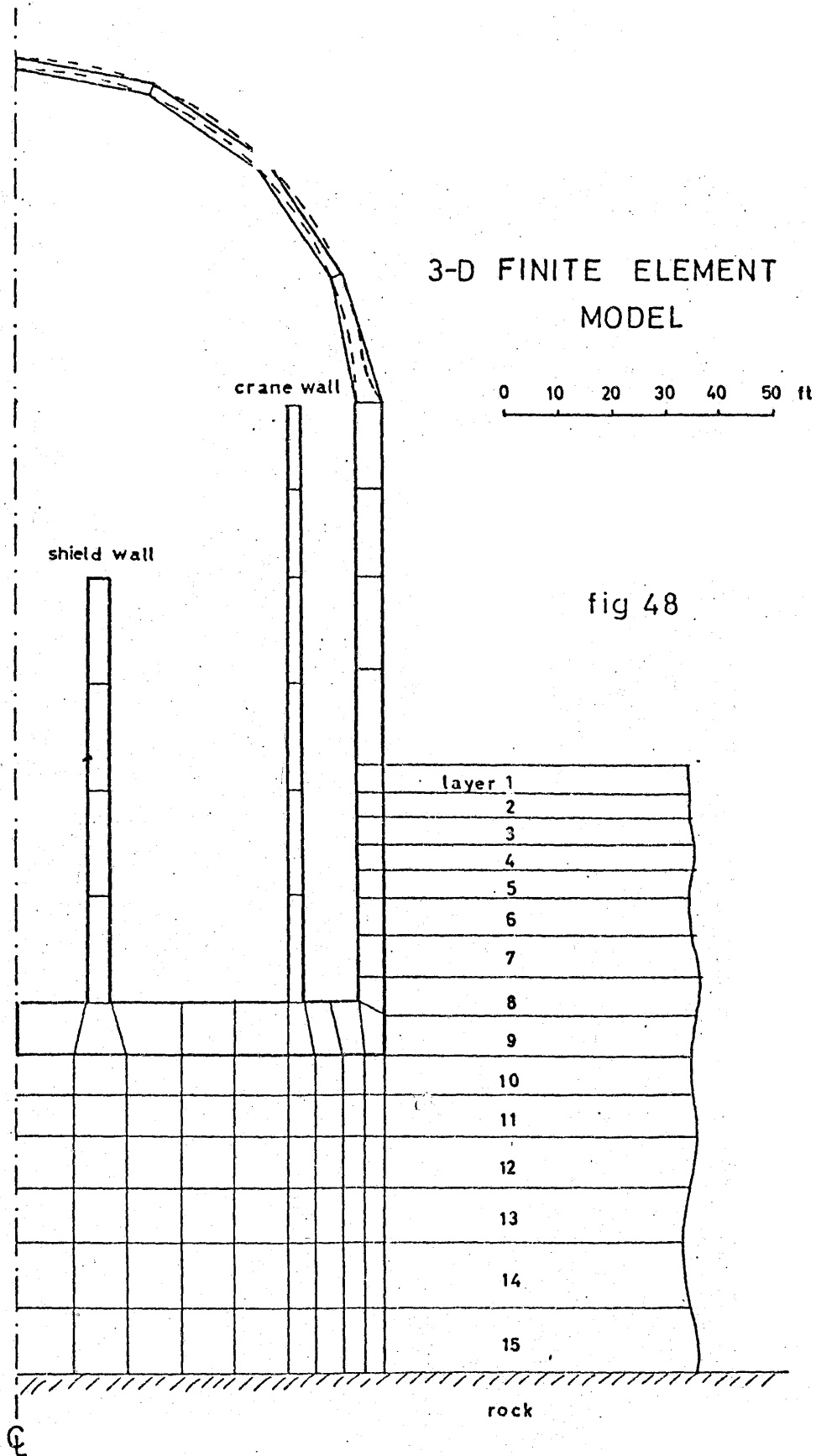


fig 48

Fig. 8.

Si l es el espesor bajo analizada las ecuaciones del movimiento son

$$(\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u}) = -\underline{m} \ddot{\psi}(t) - \frac{1}{l} \underline{c} (\dot{\underline{u}} - \dot{\underline{u}}_f) + \underline{G} \underline{u}_f - (\underline{R} + \underline{L}) (\underline{u} - \underline{u}_f) \quad (22)$$

donde \underline{M} y \underline{K} son las matrices de masa y rigidez de la rebanada, \underline{m} es el vector de influencia de las masas en dirección del movimiento en la base $\ddot{\psi}(t)$, \underline{c} es una matriz diagonal obtenida al aplicar (21) y \underline{G} la matriz de rigidez de las fuerzas de campo abierto y $\underline{R} + \underline{L}$ las matrices de WAAS y KAUSEL.

Las respuesta parecen concordar bien con los ensayos axisimétricos (Fig. 9) e incluso se aduce la experiencia de la planta nuclear de HUMBOLT BAY (Fig. 10) en la que la aplicación del citado programa ofrece una concordancia

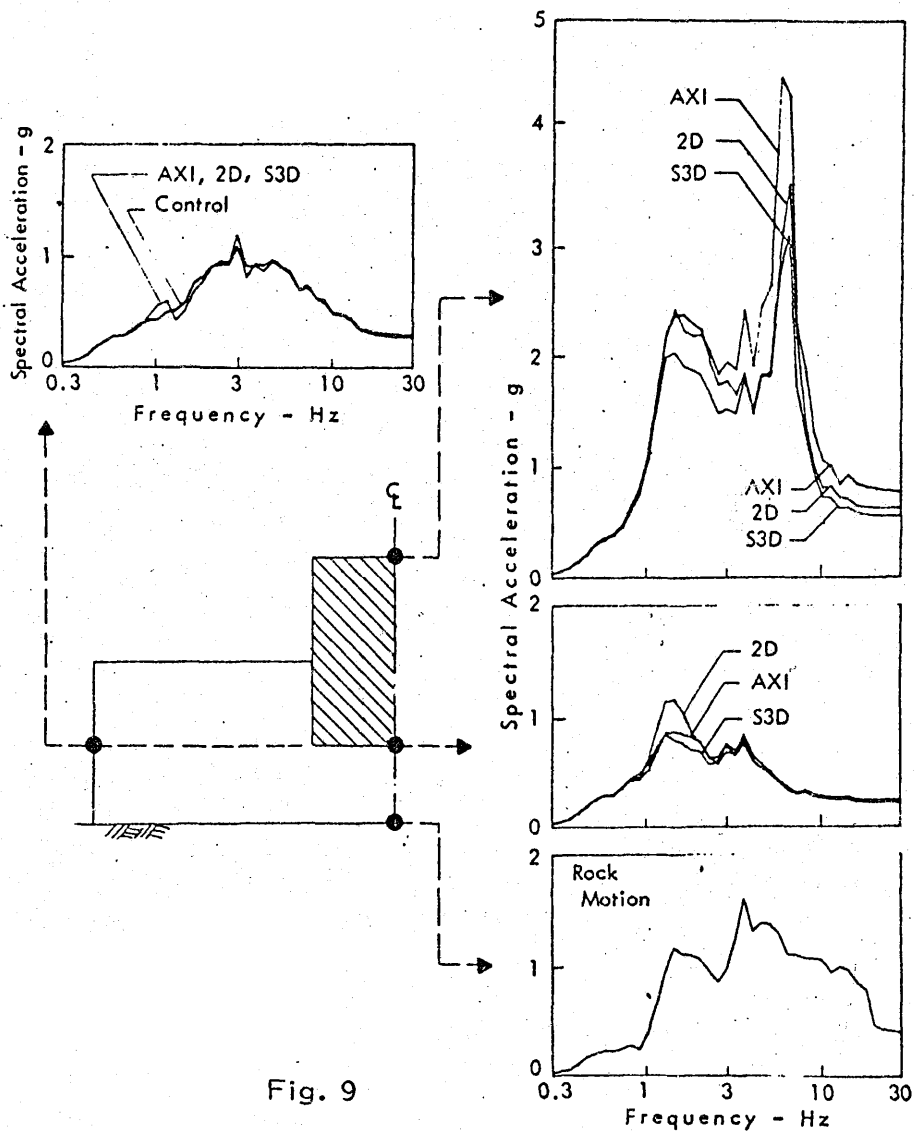
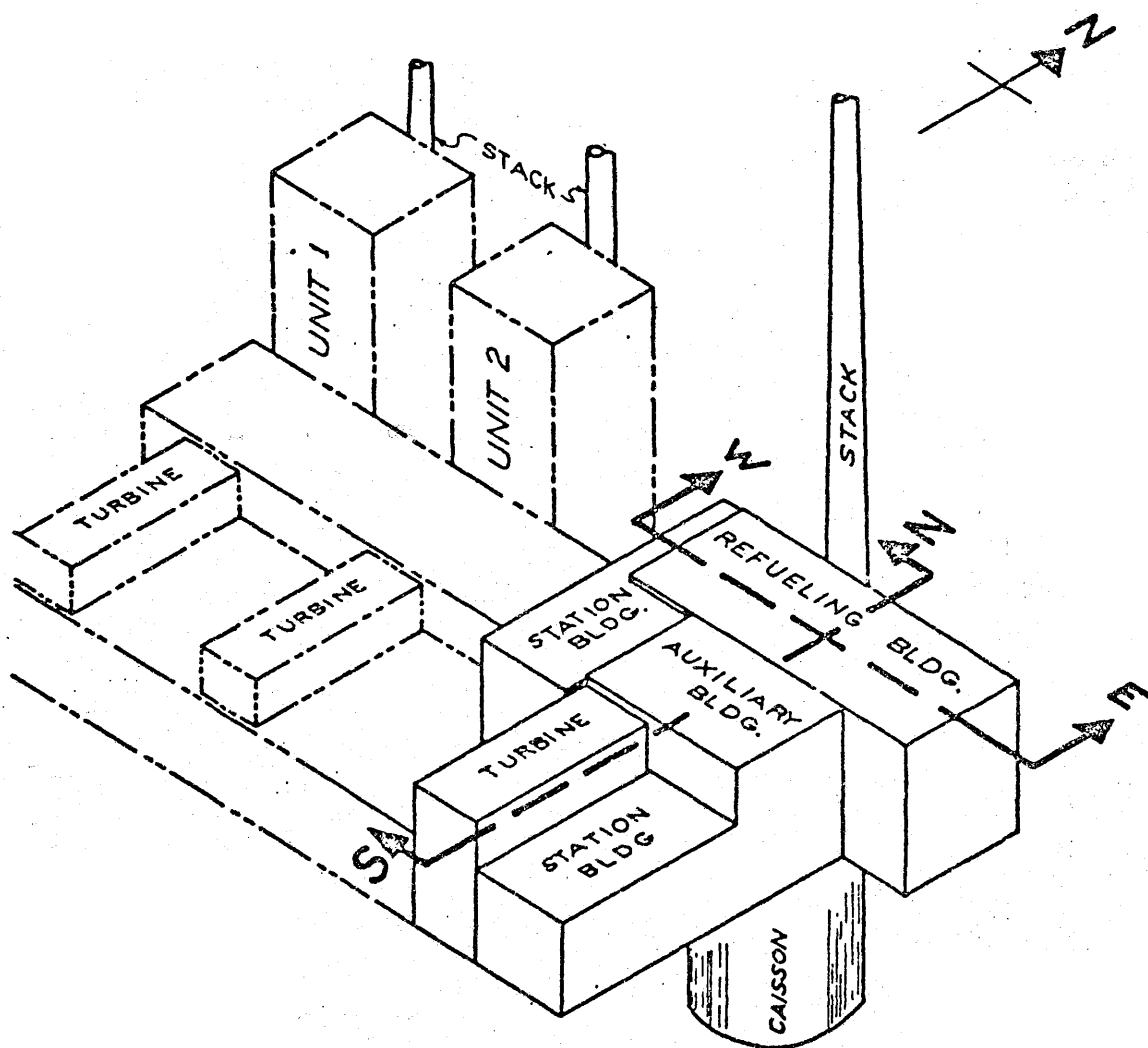


Fig. 9



GENERAL VIEW OF HUMBOLDT POWER PLANT
(After Bechtel Corp.)

Fig. 10

realmente adecuada. Todo ello hace que el programa sea el util recomen-
dado por la NRC y que en el citado panel de 1975, KAPUR finalizase su
intervención afirmando " ... the F.E. approach still represents the -
problem more realistically ..." así como manteniendo la filosofía de la
NRC que se sumariza en el cuadro siguiente

NRC LICENSING PHILOSOPHY
CONCERNING
SOIL STRUCTURE INTERACTION

Acceptable Methods for Soil-Structure Interaction Analysis

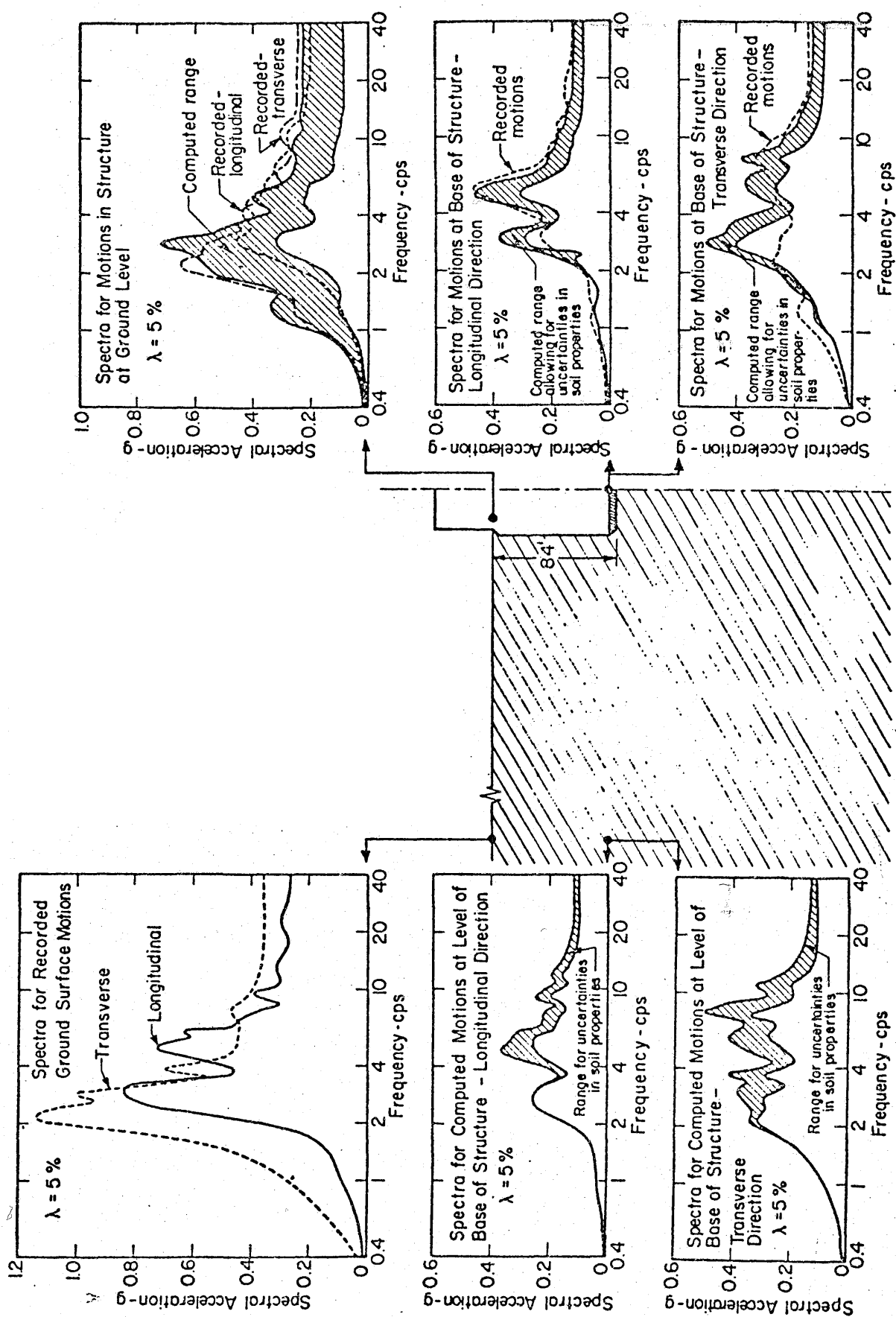
Method of Soil-Structure Interaction Analysis	Soil Foundation**				
	Rock†† Foundation	Deeply Embedded Cases	Shallowly Embedded Case		
			Deep Soil Found. w/Uniform Properties	Deep Soil Found. w/Layered Properties	Shallow Soil Foundation
Single Lumped Mass-Spring Approach	X		X		
Multiple Lumped Mass-Spring Approach*	X		X	X	X
Finite Element Approach*	X	X	X	X	X

*Or equivalent.

†Deep embedment: actual embedded depth $\geq 15\%$ of the least base width or other appropriate value to be justified.

**Medium for which the soil-structure interaction effect is negligible or alternatively, a medium with a shear wave velocity greater than or equal to 2500 ft/s.

***Soil Foundation means the depth of soil between the bottom of the foundation slab and the hard rock.



COMPARISON OF RECORDED AND COMPUTED SPECTRA IN REFUELING BUILDING - HUMBOLDT BAY POWER PLANT

No obstante existen una serie de críticas al método de las cuales --
CHRISTIAN (1975) cita:

- a.- La aproximación 2-D al problema 3-D es excesivamente --
simplista y por ejemplo desaparecen las torsiones.
- b.- En todo F.E.M. hay demasiada rigidez en el modelo si se
usa el método de los desplazamientos.
- c.- El coste es excesivo a menos que se usen contornos absor-
bentes. (WAAS ,1972, KAUSEL ,1974)
- d.- El tratamiento 2-D distorsiona los efectos tridimensionales
- e.- No se consideran ondas superficiales.
- f.- La descripción del amortiguamiento es muy aproximada.

En resumen y según indica HADJIAN, al usar FLUSH se pierden la tri-
dimensionalidad del problema, la posibilidad de análisis torsionales, la
posibilidad de refinar modelos de estructura mediante estudios paramé-
tricos y la respuesta en altas frecuencias ... " in addition to lots of -
dollars, manhours and schedules".

En contestación, los partidarios del FLUSH siguen insistiendo en que se
trata del método que mejor recoge las exigencias mínimas de un buen pro-
cedimiento:

- 1.- Consideración de la variación de las características del sue-
lo con la profundidad.
- 2.- Consideración del comportamiento no lineal del suelo así co-
mo de su amortiguamiento interno
- 3.- Para estructuras empotradas, consideración de la variación
de los movimientos del suelo con la profundidad.
- 4.- Consideración de la naturaleza tridimensional del problema
- 5.- Consideración de los efectos de interacción entre estructu-
ras vecinas.

Respecto al coste LYSMER (1975) ofrece la siguiente comparación

Type of Analysis	Computer Program	Relative Computer Time
Axi-symmetric analysis with extensive mesh	ALUSH	1.00
Axi-symmetric analysis with transmitting boundaries	(after Kausel)	0.50
Plane strain analysis with extensive mesh	LUSH	0.35
Plane strain analysis with transmitting boundaries	FLUSH	0.19
Three-dimensional analysis with viscous and transmitting boundaries	FLUSH	0.20
Three-dimensional analysis with viscous and transmitting boundaries and deconvolution through finite element mesh	FLUSH	0.10

4.--Método de las subestructuras

En este método, también llamado "de los tres pasos", implica las siguientes operaciones.

- 1.- Deconvolución, a nivel inferior de cimiento, del registro en superficie, tanto en lo que se refiere a movimiento como a giro (acoplamiento cinemático).
- 2.- Determinación de las impedancias equivalentes del semiespacio con indentación rígida sin masa. Es decir, fijación de las características de muelles y amortiguadores equivalentes, de acuerdo con lo expuesto en capítulos anteriores.
- 3.- Análisis de la estructura soportada en dichos elementos y sometida a las condiciones del punto 1.

Antes de profundizar en el tema propiamente dicho conviene observar la influencia que la flexibilidad del suelo tiene sobre el comportamiento de la estructura.

El modelo más simple puede ser el pórtico de una planta (Fig. 11.) . Si el movimiento del suelo en campo libre es $x_s(t)$ la presencia de la estructura hace que se transforme en $x(t)$ y que aparezca un giro $\theta(t)$. Desde el punto de vista del terreno es evidente que

$$\begin{bmatrix} V \\ M \end{bmatrix} = [K_{\text{SUELO}}] \begin{bmatrix} x - x_s \\ \theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde K_{SUELO} corresponde a la matriz de rigidez desarrollada en los capítulos anteriores.

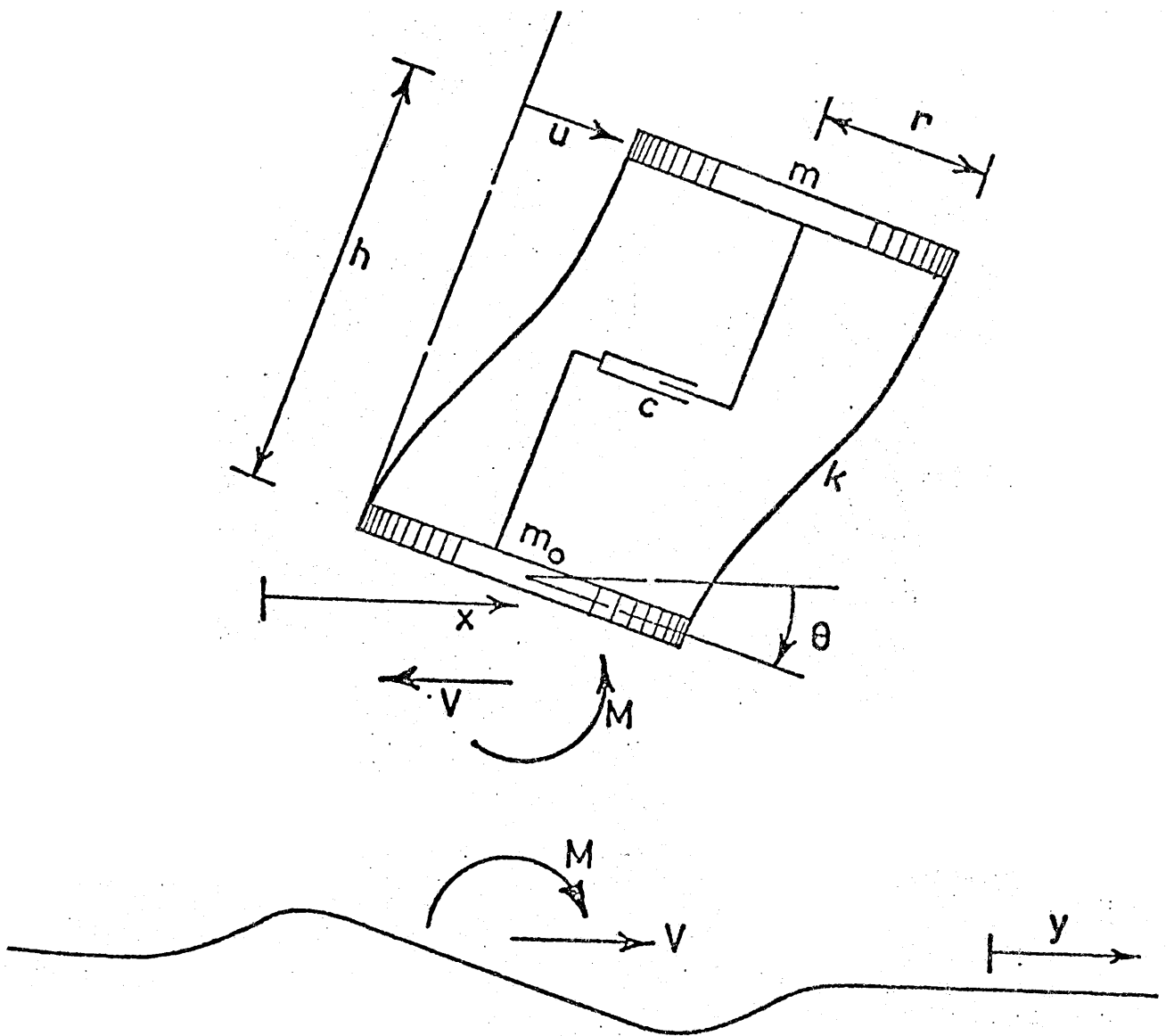
Respecto a la estructura, si u representa el movimiento relativo, el equilibrio del piso superior se escribe

$$m(\ddot{x}) + \gamma h(\ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0 \quad (24)$$

mientras que, la relación con el momento y el cortante en la base se consigue poniendo las ecuaciones de equilibrio globales

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + \gamma h + \ddot{u}) + m_o \ddot{x} + V &= 0 \\ m(\ddot{x} + \gamma h + \ddot{u})h + (I_o - I_o) \ddot{\theta} + M &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Donde m_o , I_o representan la masa y el momento de inercia de la zapata de cimentación.



COUPLED SYSTEM WITH FREE BODIES

Fig. 11:

Eliminando V y M de las ecuaciones anteriores se obtienen las relaciones que dan las respuestas x, u, θ a nuestro problema. Puesto que las relaciones de rigidez del suelo dependen de la frecuencia de excitación, es común plantear en este dominio el juego de ecuaciones anterior lo que conduce a buscar soluciones

$$\begin{aligned} u &= U e^{i \Omega t} \\ x &= X e^{i \Omega t} \\ \theta &= \theta e^{i \Omega t} \end{aligned} \quad (26)$$

De (24) se sigue

$$U = \frac{X + \theta h}{\left[\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 - 1 \right] + i 2 \zeta \frac{\omega}{\Omega}} \quad (27)$$

mientras que las dos ecuaciones de equilibrio global se reducen a

$$\Omega^2 [m_o X + m (X + h \theta + U)] = V \quad (28)$$

$$\Omega^2 [(I + I_o) \theta + m h (X + h \theta + U)] = M$$

Si se denomina factor de amplificación a

$$AF = \frac{1 + 2 i \zeta \frac{\omega}{\Omega}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) + i 2 \zeta \frac{\Omega}{\omega}} \quad (29)$$

U puede eliminarse obteniéndose finalmente

$$\Omega^2 m \begin{bmatrix} \frac{m_o}{m} & 0 \\ 0 & \frac{I + I_o}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} + \Omega^2 m AF \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ M \end{Bmatrix}$$

o bien, en forma simbólica

$$[K_{PORTICO}] \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ M \end{Bmatrix} \quad (30)$$

que combinada con (23) se puede poner:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^p & k_{12}^p \\ k_{21}^p & k_{22}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^s & k_{12}^s \\ k_{21}^s & k_{22}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X - X_s \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (31)$$

o, finalmente

$$\begin{bmatrix} k_{11}^p - k_{11}^s & k_{12}^p - k_{12}^s \\ k_{21}^p - k_{21}^s & k_{22}^p - k_{22}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_{11}^s X_s \\ -k_{21}^s X_s \end{Bmatrix} \quad (32)$$

que al ser resuelta para cada frecuencia produce los resultados $X(\omega)$, $\theta(\omega)$, $U(\omega)$ y con la aplicación inversa de la FFT, los correspondientes resultados temporales.

El método puede extenderse sin ninguna dificultad a sistemas con n grados de libertad (Fig. 12)

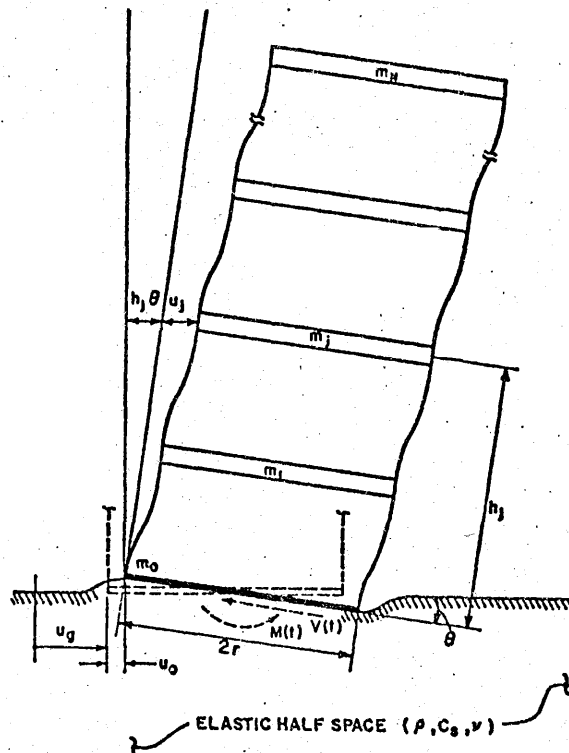


Figure 1. Idealized building-foundation system

Fig. 12

El equilibrio de las N masas del pórtico se escribe con el sistema

$$\underline{m} \ddot{\underline{x}}^t + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = 0 \quad (33)$$

mientras que el equilibrio global

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N m_j \ddot{x}_j^t + m_o (\ddot{x} + V) &= 0 \\ \sum_{j=1}^N m_j h_j \ddot{x}_j^t + \left(\sum_{j=0}^N I_j \right) \ddot{\theta} + M &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Como

$$\underline{x}^t = \underline{x} \underline{1} + \theta \underline{h} + \underline{u} \quad (35)$$

la ecuación (33) se reduce a

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = -\ddot{x} \underline{m} \underline{1} - \ddot{\theta} \underline{m} \underline{h} \quad (36)$$

mientras que las siguientes son

$$\begin{aligned} \underline{1}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} + L_p \ddot{\theta} + m_t \ddot{x} + V &= 0 \\ \underline{h}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} + I_t \ddot{\theta} + L_p \ddot{x} + M &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

En el caso de movimiento armónico

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{U} e^{i\Omega t} \\ \underline{x} &= \underline{X} e^{i\Omega t} \\ \theta &= \theta e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (38)$$

se reducen a

$$\begin{cases} [-\Omega^2 \underline{m} + i\Omega \underline{c} + \underline{k}] \underline{U} = \Omega^2 (\underline{X} \underline{m} \underline{1} + \theta \underline{m} \underline{h}) \\ \Omega^2 [\underline{1}^T \underline{m} \underline{U} + m_t \underline{X} + L_p \theta] = V \\ \Omega^2 [\underline{h}^T \underline{m} \underline{U} + L_p \underline{X} + I_t \theta] = M \end{cases} \quad (39)$$

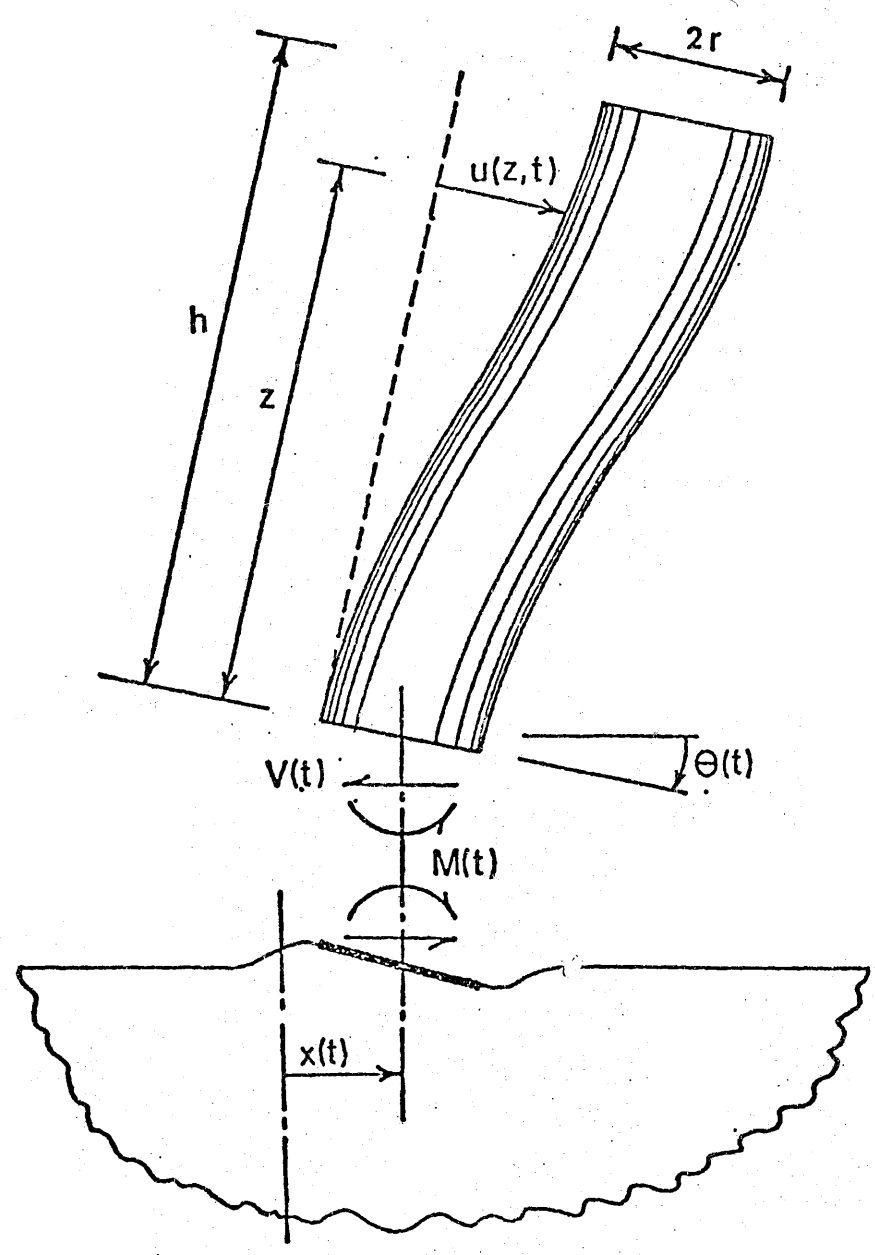
donde se ha hecho

$$\begin{cases} m_t = m_o + \sum_{j=1}^N m_j \\ L_p = \sum_{j=1}^N m_j h_j \\ I_t = I_o + \sum_{j=1}^N I_j + \sum_{j=1}^N m_j h_j^2 \end{cases} \quad (40)$$

Sustituyendo la expresión de V y M en función de las características del terreno y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas resultantes se llegaría a la solución del problema

Puesto que, como se vió en otro capítulo, el pórtico a cortante es una discretización de la viga a cortante es interesante plantear la interacción en este último caso.

El problema a que nos referimos es es de la Fig. 13.



SHEAR BEAM INTERACTION SYSTEM

Fig. 13

El equilibrio de una rebanada a la altura z es

$$m (\ddot{x} + z \ddot{\theta} + \ddot{u}) = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (41)$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Q}{kGA}$$

donde kA es el área efectiva a cortante, por lo que

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = kGA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (42)$$

con lo que (41) pasa a escribirse

$$\ddot{x} + z \ddot{\theta} + \ddot{u} = \frac{kGA}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (43)$$

Las ecuaciones de equilibrio global se obtienen sumando fuerzas y momentos en la base

$$\begin{aligned} \int_0^h m (\ddot{x} + z \ddot{\theta} + \ddot{u}) dz + V &= 0 \\ \int_0^h m z (\ddot{x} + z \ddot{\theta} + \ddot{u}) dz + I \ddot{\theta} + M &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

donde:

m : masa por unidad de longitud de la viga
 I : momento de inercia total de la viga.

Si se sustituye la ecuación de equilibrio de la rebanada en las dos anteriores

$$\begin{aligned} kGA \int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz + V &= 0 \\ kGA \int_0^h z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz + I \ddot{\theta} + M &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

cuya integración se realiza teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_h = 0 \quad ; \quad u \Big|_0 = 0 \quad (46)$$

con lo que

$$+ kGA \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_0 = V \quad (47)$$

$$kGA \frac{U}{h} + I \ddot{\theta} = M$$

Si se trabaja en frecuencia

$$\begin{cases} V = kGA \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_0 \\ M = kGA \frac{U}{h} + I \Omega^2 \theta \end{cases} \quad (48)$$

que puede combinarse con la rigidez del terreno. La ecuación de la reba nada a su vez es

$$\frac{kGA}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \Omega^2 U = -\Omega^2 X - \Omega^2 z \theta \quad (49)$$

Si llamamos $p^2 = \frac{\Omega^2 m}{kGA}$

la solución analítica de (49) es

$$U(z) = C \operatorname{sen} p z + D \operatorname{Cos} p z - p^2 X - p^2 z \theta \quad (50)$$

para las condiciones de contorno

$$D = p^2 X$$

$$C \cos p h - D \operatorname{sen} p h = p \theta$$

$$C = p^2 \operatorname{tg} p h X + p \theta \sec p h \quad (51)$$

$$U(z) = X [p^2 \operatorname{tg} p h \operatorname{sen} p z + p^2 \operatorname{cos} p z - p^2] + \theta [p \sec p h \operatorname{sen} p z - p^2 z] \quad (52)$$

Obtenidos de aquí los valores $U(h)$ y $\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_0$ pueden sustituirse en las relaciones (48) y conectar con el terreno para calcular X y θ en la forma habitual.

4.1.-Planteamiento general.

Una interesante agrupación de los resultados anteriores se obtiene en el caso de suponer que las matrices del terreno no dependen de la frecuencia en cuyo caso

$$\begin{aligned} V &= h_1 (x - x_s) + c_1 (\dot{x} - \dot{x}_s) \\ M &= k_2 \theta + c_2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (53)$$

Llamando

$$\begin{aligned} x_t &= x + u + \theta h \\ u &= x_t - x - \theta h \end{aligned} \quad (54)$$

las ecuaciones de equilibrio en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ m & m_o & 0 \\ mh & 0 & 1+l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_t \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & -ch \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & -kh \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 x_s + c_1 \dot{x}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Restándole a la 2ª la 1ª y a la 3ª la 1ª multiplicada por h para eliminar el acoplamiento inercial se obtiene

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m_o & 0 \\ 0 & 0 & 1+l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_t \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & -ch \\ -c & c_1+c & ch \\ -ch & c & c_2+ch \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & -kh \\ -k & k_1+k & kh \\ -kh & kh & k_2+kh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 x_s + c_1 \dot{x}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

La partición indicada separa los grados de libertad de la estructura \underline{x}_e de los correspondientes a la fundación \underline{x}_f pudiéndose escribir el conjunto como

$$\begin{bmatrix} \underline{m}_e & \underline{m}_{ef} \\ \underline{m}_{ef}^T & \underline{m}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_e \\ \ddot{\underline{x}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{c}_e & \underline{c}_{ef} \\ \underline{c}_{ef}^T & \underline{c}_f + \underline{c}_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_e \\ \dot{\underline{x}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_e & \underline{k}_{ef} \\ \underline{k}_{ef}^T & \underline{k}_f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_e \\ \underline{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{k}_f^* \underline{x}_s + \underline{c}_f^* \dot{\underline{x}}_s \end{bmatrix} \quad (57)$$

que es válida para sistemas con n grados de libertad.

En un caso general donde se ha establecido el equilibrio en la estruc-

$$\begin{bmatrix} \underline{m}_e & \underline{m}_{ef} \\ \underline{m}_{ef}^T & \underline{m}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_e \\ \ddot{\underline{x}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{c}_e & \underline{c}_{ef} \\ \underline{c}_{ef}^T & \underline{c}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_e \\ \dot{\underline{x}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_e & \underline{k}_{ef} \\ \underline{k}_{ef}^T & \underline{k}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_e \\ \underline{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ + \underline{p}_f \end{bmatrix} \quad (58)$$

tura sometida a las cargas de la interfase.

Las matrices de la estructura se pueden calcular por el procedimiento habitual. Así por ejemplo en el caso del pórtico a cortante (Fig. 14) la matriz de rigidez se contruye dando movimientos unidad a los grados de libertad implicados en la obtención de cada columna, manteniendo nulos los demás. Las fuerzas necesarias para mantener esas deformaciones se presentan en dos casos típicos en la Fig. 14 correspondiendo a los grados de libertad 1 y 3. El grado de libertad de giro se ha

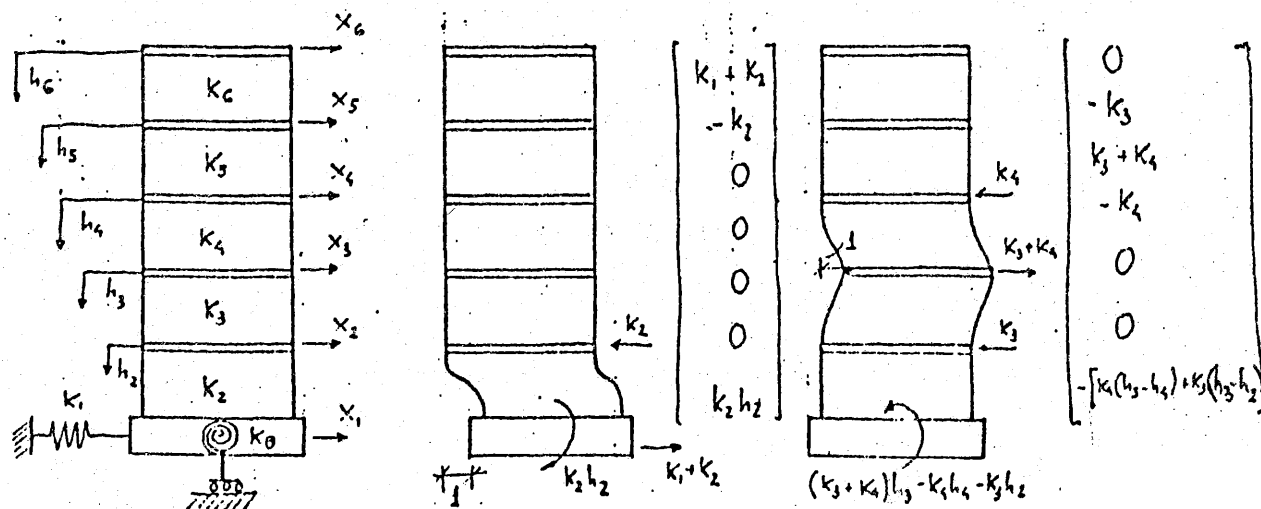


Fig. 14

colocado en último lugar. Obsérvese también el sentido de los momentos que es preciso colocar en el muelle a rotación para mantener el equilibrio de fuerzas. La matriz total ensamblada es:

$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_3+k_2 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ & & & k_4+k_5 & -k_5 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & k_5+k_6 & -k_6 \\ & & & & & k_6 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} & k_2 h_2 \\ & -k_3(h_2-h_3)+k_2 h_2 \\ & -k_4(h_3-h_4)+k_3(h_3-h_2) \\ & -k_5(h_4-h_5)+k_4(h_4-h_3) \\ & -k_6(h_5-h_6)+k_5(h_5-h_4) \\ & -k_6(h_6-h_4) \\ & k + F_i h_i \end{aligned}$
---	--

(59)

Interesante es la interpretación geométrica de la columna 7. El giro de la base provoca unos movimientos de sólido rígido h_i en cada piso, cuya anulación se consigue mediante la aplicación de pares que anulen la deformación relativa cada dos pisos (Fig. 15).

Con objeto de comparar con la formulación general es conveniente agrupar a los grados de libertad del cimiento y así, se varía de posición la primera columna, poniéndola en el lugar de la columna número seis y poniendo las columnas 2,3,4,5 y 6 en los lugares 1, 2, 3, 4, y 5 sucesivamente. Así mismo, se coloca la fila 1 en el lugar de la seis y se realiza la misma operación que la realizada con las columnas

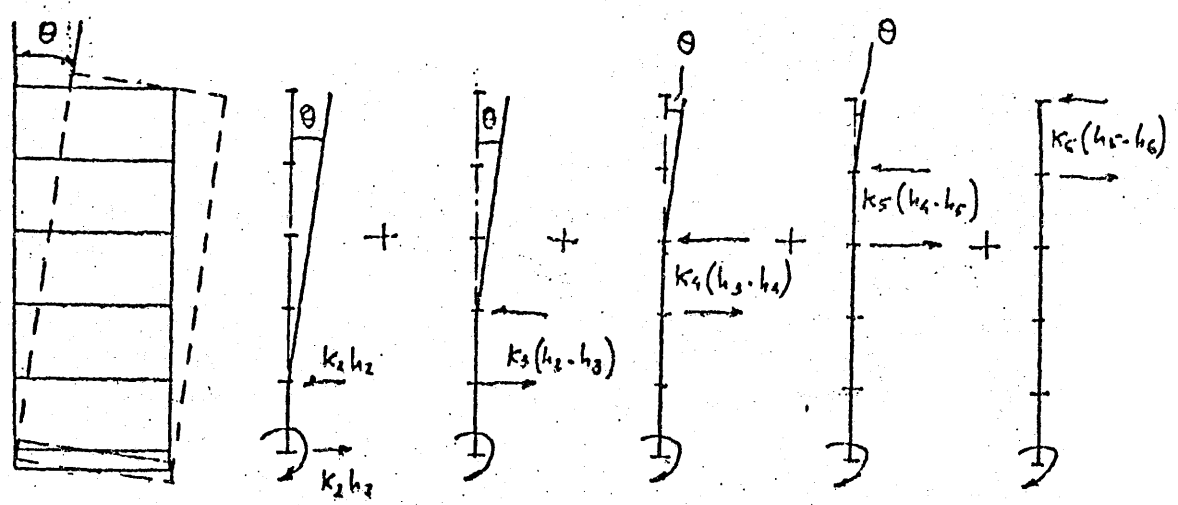


Fig. 15

La operación realizada hace que la matriz obtenida se corresponda con la partición:

$$\begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K}_b \\ \underline{K}_b^T & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad (60)$$

en la que \underline{K} es la típica matriz tridiagonal del edificio a cortante y \underline{K}_{bb} la correspondiente a los grados de libertad del cimiento. En la matriz, el elemento 7-7 -no cambia de lugar- representa las expresiones de las fuerzas que se desarrollan desde el 7-1 al 7-6 (F_i).

Obtenidas las matrices del problema se puede organizar el problema en movimientos totales como en (58).

El paso al dominio de la frecuencia se realiza mediante el uso de la - FFT en forma análoga a lo indicado anteriormente, resultando

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 \begin{bmatrix} \underline{m}_e & \underline{m}_{ef} \\ \underline{m}_{ef}^T & \underline{m}_f \end{bmatrix} + i\Omega \begin{bmatrix} \underline{c}_e & \underline{c}_{ef} \\ \underline{c}_{ef}^T & \underline{c}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_e & \underline{k}_{ef} \\ \underline{k}_{ef}^T & \underline{k}_f \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_e \\ \underline{X}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{P} \end{bmatrix} \quad (61)$$

teniendo en cuenta (23)

$$\underline{P} = -\underline{X}(\Omega) [\underline{X}_f - \underline{X}_s]$$

lo que conduce al conjunto de ecuaciones complejas simultáneas

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 \underline{m} + i\Omega \underline{c} + \begin{bmatrix} \underline{k}_e & \underline{k}_{ef} \\ \underline{k}_{ef}^T & \underline{k}_f + \underline{K} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_e \\ \underline{X}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{K} \underline{X}_s \end{bmatrix} \quad (62)$$

resoluble, para cada Ω , mediante el uso de cualquier subrutina de biblioteca.

Debe observarse que existe la posibilidad de introducir valores \underline{X}_s distintos para cada nudo de conexión cimiento-estructura si ello se estima necesario y si se dispone de suficientes datos para simular la realidad.

4.2.-Formulación en movimientos relativos.

En lugar de utilizar los movimientos totales, se suele revelar útil la

expresión de las ecuaciones en términos de movimientos relativos respecto a una deformada cuasiestática.

La resolución es la siguiente; de la primera serie se extrae:

$$\underline{m} \ddot{\underline{x}}^t + \underline{c} \dot{\underline{x}}^t + \underline{k} \underline{x}^t = -(\underline{M}_x \ddot{\underline{x}}_s^t + \underline{C}_s \dot{\underline{x}}_s^t + \underline{K}_s \underline{x}_s^t) = \underline{p}_{ef}^T \quad (63)$$

En un movimiento estático $\dot{\underline{x}} = \ddot{\underline{x}} = 0 = \dot{\underline{x}}_s = \ddot{\underline{x}}_s$, luego

$$\underline{K} \underline{x}_{st}^t = -\underline{K}_x \underline{x}_s^t \quad (64)$$

$$\underline{x}_{st}^t = -\underline{K}^{-1} \underline{K}_s \underline{x}_s^t \quad (65)$$

Esta relación se introduce mediante un vector de influencia \underline{r} tal que

$$\underline{x}_{st}^t = \underline{r} \underline{x}_s^t \quad (66)$$

por lo que en nuestro caso

$$\underline{r} = \underline{K}^{-1} \underline{K}_s \quad (67)$$

si ahora hacemos

$$\underline{x}^t = \underline{x}_{st}^t + \underline{x} = \underline{r} \underline{x}_s^t + \underline{x} \quad (68)$$

la ecuación (63) se puede escribir

$$\underline{M} (\underline{x}_{st}^t + \underline{x}) + \underline{c} (\dot{\underline{x}}_{st}^t + \dot{\underline{x}}) + \underline{K} (\underline{x}_{st}^t + \underline{x}) = \underline{p}_{ef}^T \quad (69)$$

o bien

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{c} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = -\ddot{\underline{x}}_s^t [\underline{M}_s + \underline{M} \underline{r}] - \dot{\underline{x}}_s^t [\underline{C}_s + \underline{c} \underline{r}] - \underline{x}_s^t [\underline{K}_s + \underline{K} \underline{r}] \quad (70)$$

En el último sumando del segundo miembro

$$\underline{K}_s + \underline{K} \underline{r} = \underline{K}_s - \underline{K} \underline{K}^{-1} \underline{K}_s = 0 \quad (71)$$

de modo que finalmente,

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = -\ddot{\underline{x}}_s^t [\underline{M}_s + \underline{M} \underline{r}] - \dot{\underline{x}}_s^t [\underline{C}_s + \underline{C} \underline{r}] \quad (72)$$

El efecto del amortiguamiento se suele considerar despreciable frente al de la inercia y por ello (72) suele aparecer con tan sólo el primer sumando del segundo miembro.

Obsérvese también que en el caso $\underline{C}^t = \underline{\alpha} \underline{K}^t$ la anulación sería una consecuencia de (71).

El proceso anterior está realizado suponiendo que se conoce \underline{x}_s^t , para el caso de interacción un método paralelo debe realizarse con el sistema completo mediante un cambio

$$\begin{pmatrix} \underline{x}^t \\ \underline{x}_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{x}_{st} \\ \underline{v}_{so} \end{pmatrix} \quad (73)$$

El primer vector del segundo miembro representa los movimientos relativos de la estructura y el segundo los desplazamientos cuasiestáticos provocados por el registro \underline{v}_{so} .

\underline{x}_s representa el movimiento de interacción, y se anularía si el cimiento fuera rígido, conduciendo a la formulación anterior.

Ahora,

$$\underline{M}^t \begin{pmatrix} \ddot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}}_s \end{pmatrix} + \underline{C}^t \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{x}}_s \end{pmatrix} + \underline{K}^t \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{f}_s(t) \end{pmatrix} - \underline{M}^t \begin{pmatrix} \ddot{\underline{x}}_{st} \\ \ddot{\underline{v}}_{so} \end{pmatrix} - \underline{C}^t \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}_{st} \\ \dot{\underline{v}}_{so} \end{pmatrix} - \underline{K}^t \begin{pmatrix} \underline{x}_{st} \\ \underline{v}_{so} \end{pmatrix} \quad (74)$$

Además,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{f}_s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{X}^{-F} \begin{bmatrix} \underline{x}_s^t & \underline{v}_{so} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{X}^{-F} \underline{x}_s \end{pmatrix} \quad (75)$$

donde hemos designado por \underline{X}^{-F} la representación en el tiempo de la matriz de rigidez dinámica.

Pasando al primer miembro y llamando \underline{K}_F^t a la matriz de rigidez con \underline{x} incluida

$$\underline{M}^t \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}}_s \end{Bmatrix} + \underline{C}^t \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{x}}_s \end{Bmatrix} + \underline{K}_F^t \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{Bmatrix} = -\underline{M}^t \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{x}}_{st} \\ \ddot{\underline{v}}_{so} \end{Bmatrix} - \underline{C}^t \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}}_{st} \\ \dot{\underline{v}}_{so} \end{Bmatrix} - \underline{K}^t \begin{Bmatrix} \underline{x}_{st} \\ \underline{v}_{so} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Si escribimos,

$$\begin{Bmatrix} \underline{x}_{st} \\ \underline{v}_{so} \end{Bmatrix} = \underline{a}_s^u \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underline{a}_s^u \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (77)$$

es claro que

$$\underline{K}^t \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{K}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (78)$$

en virtud del significado físico de las filas y columnas de \underline{K}^t , si además se desprecia la influencia del amortiguamiento comparada con la de la inercia, la (76) se puede escribir en el dominio de la frecuencia como:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{M}_s \\ \underline{M}_s^T & \underline{M}_{ss} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{c}_s \\ \underline{c}_s^T & \underline{c}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K}_s \\ \underline{K}_s^T & \underline{K}_{ss} + X(\omega) \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \underline{x}^*(\omega) \\ \underline{x}_s^*(\omega) \end{Bmatrix} =$$

$$= -\underline{a}_s^u(\omega) \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \\ 0 \end{Bmatrix} - \underline{a}_s^v(\omega) \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (79)$$

Para cada frecuencia es preciso realizar una multiplicación matricial, mientras que en (79) son vectores ajustados a unas escalas $a_s(w)$ constantes para cada frecuencia. Además, como veremos en los próximos apartados, la formulación modal es mejor realizarla en movimientos relativos.

4.3.-Formulación con los modos de un sistema asociado.

La resolución directa del sistema de ecuaciones en el campo de la frecuencia es el método más exacto y deseable para obtener resultados correctos.

La potencia de cálculo y almacenamiento necesarios son sin embargo, muy grandes. Imaginemos, por ejemplo, una estructura de 100 nudos. El sistema a resolver sería de 200 ecuaciones complejas para cada frecuencia, es decir, si se utilizasen 1000 valores de w sería preciso resolver 200.000 ecuaciones y almacenar 200.000 cantidades complejas.

Si se utilizan los modos en un sistema clásico, estas cantidades se ven disminuidas ya que bastan las primeras pocas funciones modales para representar muy aproximadamente el comportamiento de la estructura.

En nuestro caso no es posible obtener modos, debido a la presencia en K de los términos del cimientto en función de la frecuencia.

Que no existan modos no quiere decir, sin embargo, que no puede ser posible utilizar la técnica de Ritz, expresando la deformación como combinación lineal de ciertas funciones de forma.

Una manera de elegir esas funciones es obteniendo los modos de un sistema asociado.

Otro punto de interés en la técnica modal radica en la posibilidad de estudiar la influencia de la interacción en las propiedades dinámicas de la estructura: frecuencias de resonancia y formas de vibración en resonancia.

Vamos a describir dos métodos, el primero de los cuales ha dado buenos resultados en los análisis de edificios altos y el segundo en presas de gravedad.

4.3.1.--Modos en base rígida.

Al igual que antes vamos a plantear las ecuaciones en movimientos relativos. N es el número de modos en la superestructura y N_s los comunes con el cimiento.

Hacemos:

$$\underline{x} = \underline{\phi} \underline{Y} \quad (80)$$

(2N x 1) (2N x 2N) (2N x 1)

donde $\underline{\phi}$ es la matriz de modos de la estructura de base rígida, de tal modo que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} &= \underline{I} \\ \underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi} &= \omega^2 \end{aligned} \quad (81)$$

tras la oportuna normalización.

Si hacemos que

$$\underline{C}^t = \alpha \underline{M}^t + \beta \underline{K}^t \quad (82)$$

la ecuación (79) se puede escribir

$$\begin{aligned} & \left\{ (-\omega^2 + i\omega\alpha) \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{M}_s \\ \underline{M}_s^T & \underline{M}_{ss} \end{bmatrix} + (1 + i\omega\beta) \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K}_s \\ \underline{K}_s^T & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & X(\omega) \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \underline{\phi} \\ \underline{Y} \end{Bmatrix} = \\ & = -a_s^u(\omega) \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{M}_s \\ \underline{M}_s^T & \underline{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - a_s^v(\omega) \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{M}_s \\ \underline{M}_s^T & \underline{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots (83) \end{aligned}$$

Introduciendo $\underline{\phi}$ en las expresiones matriciales y premultiplicando por $\underline{\phi}^T$ las ecuaciones superiores se obtiene, (si se considera matriz de

masa diagonal) en el primer miembro.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\omega^2 + i\omega\alpha) \left[\begin{array}{ccc} \underline{\phi}^T & \underline{M} & \underline{\phi} & 0 \\ 0 & & & \underline{M}_{ss} \end{array} \right] + (1+i\omega\beta) \left[\begin{array}{ccc} \underline{\phi}^T & \underline{K} & \underline{\phi} & \underline{\phi}^T \underline{K}_s \\ \underline{K}_s^T & & & \underline{K}_{ss} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{cc} \underline{0} & \underline{0} \\ 0 & X(\omega) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{Y} \\ \underline{x}_s \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (84)$$

o, definitivamente

$$\left[\begin{array}{cc} (-\omega^2 + i\omega\alpha) \underline{\phi}^T + (1+i\omega\beta) \underline{\phi}^T \underline{K}_s & (1+i\omega\beta) \underline{\phi}^T \underline{K}_s \\ (1+i\omega\beta) \underline{K}_s^T \underline{\phi} & (-\omega^2 + i\omega\alpha) \underline{M}_{ss} + (1+i\omega\beta) \underline{K}_{ss} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{Y} \\ \underline{x}_s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{Y} \\ \underline{x}_s \end{array} \right\} \quad (85)$$

gracias a las propiedades (81).

En forma simbólica,

$$\left[\begin{array}{ccc} \underline{\tilde{K}} & \underline{\tilde{K}}_s & \underline{Y} \\ \underline{\tilde{K}}_s^T & \underline{\tilde{K}}_{ss} & \underline{x}_s \end{array} \right] = -a_s^u(\omega) \left[\begin{array}{cc} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_{ss} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} - a_s^v(\omega) \left[\begin{array}{cc} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_{ss} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (86)$$

donde:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\tilde{K}}_{ss} = (-\omega^2 + i\omega\alpha) \underline{M}_{ss} + (1+i\omega\beta) \underline{K}_{ss} + X(\omega) \\ \underline{\tilde{K}}_s = (1+i\omega\beta) \underline{\phi}^T \underline{K}_s \\ \underline{\tilde{K}}_{jj} = -\omega^2 + i\omega\alpha + i\omega\omega_j\beta + \omega_j^2 \\ \underline{\tilde{K}}_{jl} = 0 \quad j \neq l \end{array} \right\} \quad j, l = 1, 2, 3, \dots, 2N$$

Evidentemente para que (86) sea mas ventajosa de resolver se necesita

reducir el número de ecuaciones y ello se consigue si en lugar de la $\underline{\Phi}$ ($2N \times 2N$) se utiliza una $\underline{\Phi}$ troncada de tan solo \underline{m} modos.

$$\begin{matrix} \underline{X} & \approx & \underline{\Phi} & \underline{Y} \\ (2N \times 1) & & (2N \times m) & (m \times 1) \end{matrix} \tag{87}$$

con lo que el sistema a resolver ahora tiene tan solo $m + 2N_s$ ecuaciones incógnitas.

4.3.2.--Modos con matriz del suelo independiente de la frecuencia.

La idea básica surge de algunos problemas de interacción en los que se ha comprobado que $X(\omega)$ es relativamente insensitiva; por consiguiente una matriz de rigidez formada por $X(\omega_1)$ donde ω_1 fuera una frecuencia predeterminada, conduciría al planteamiento de unas ecuaciones que admitirían modos normales.

En este estudio hemos elegido $\omega_1 = 0$ lo que de acuerdo con WAISH y CHOPRA produce resultados aceptables.

$$\begin{aligned} & \left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_{ss} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{c}_{ss} \\ \underline{c}_s^T & \underline{c}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K}_s \\ \underline{K}_s^T & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{X}(\omega) \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \underline{x}^* (\omega) \\ \underline{x}_s^* (\omega) \end{Bmatrix} = \\ & = -\underline{a}_s^u (\omega) \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} - \underline{a}_s^v (\omega) \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ 0 \\ M_n \end{Bmatrix} \tag{88} \end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{X}} (\omega) = \underline{X} (\omega) - \underline{X} (0) \tag{89}$$

y los modos se buscan en el sistema sin $\underline{\tilde{X}} (\omega)$

$$\begin{aligned} & \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = \underline{I} \\ & \underline{\Phi}^T \underline{\tilde{K}} \underline{\Phi} = \underline{\omega}^2 \\ & \underline{\tilde{K}} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{K}_s \\ \underline{K}_s^T & \underline{K}_{ss} + \underline{X} (0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{90}$$

Al igual que anteriormente tomamos m modos y formamos,

$$\begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}_s \end{Bmatrix} = \underline{\Phi} \underline{Y} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{15} & \phi_{25} & \phi_{35} & \dots & \phi_{ms} \end{bmatrix} \underline{Y} \quad (91)$$

donde la matriz modal ha sido particionada separando los grados del - suelo.

(88) se escribe ahora, en el tiempo

$$\left\{ -\omega^2 \underline{M}^t \underline{\phi} + i\omega \underline{C}^t \underline{\phi} + \underline{\tilde{K}} \underline{\phi} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\tilde{X}}(\omega) \underline{\phi} \end{bmatrix} \right\} \underline{Y} = -a_s^u \underline{E}_u - a_s^v \underline{E}_v \quad (92)$$

premultiplicando por $\underline{\phi}^T$ y utilizando (89)

$$\left\{ -\omega^2 \underline{\phi}^T \underline{M}^t \underline{\phi} + i\omega \underline{\phi}^T \underline{C}^t \underline{\phi} + \omega^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\phi}^T \underline{\tilde{X}}(\omega) \underline{\phi} \end{bmatrix} \right\} \underline{Y} = -\underline{\phi}^T [a_s^u \underline{E}_u + a_s^v \underline{E}_v] \quad (93)$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} \underline{\phi}^T \underline{C}^t \underline{\phi} &= [2\zeta\omega_j] \\ \underline{\phi}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\tilde{X}}(\omega) \end{bmatrix} \underline{\phi} &= [\tilde{X}_{ii}] \\ -\underline{\phi}^T [a_s^u \underline{E}_u + a_s^v \underline{E}_v] &= [p_i] \end{aligned} \quad (94)$$

las ecuaciones son

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_1^2 + 2i\zeta_1\omega\omega_j + \tilde{X}_{11}) Y_1 + \tilde{X}_{12} Y_2 + \tilde{X}_{13} Y_3 + \dots + \tilde{X}_{1m} Y_m &= p_1 \\ \tilde{X}_{21} Y_1 + (-\omega^2 + \omega_2^2 + 2i\zeta_2\omega\omega_j + \tilde{X}_{22}) Y_2 + \tilde{X}_{23} Y_3 + \dots + \tilde{X}_{2m} Y_m &= p_2 \\ \tilde{X}_{31} Y_1 + \tilde{X}_{32} Y_2 + (-\omega^2 + \omega_3^2 + 2i\zeta_3\omega\omega_j + \tilde{X}_{33}) Y_3 + \dots + \tilde{X}_{3m} Y_m &= p_3 \end{aligned}$$

si convenimos en numerar en primer lugar el grado de libertad horizontal en cada nodo. Los productos $\underline{m} \quad \underline{r}$ son entonces

$$\begin{aligned} (\underline{E}^u)^T &= (\underline{M} \quad \underline{r}_1)^T = [M_1; 0; M_2; 0; \dots; M_n; 0] \\ (\underline{E}^v)^T &= (\underline{M} \quad \underline{r}_2)^T = [0; M_1; 0; M_2; \dots; 0; M_n] \end{aligned} \quad (97)$$

y el vector de fuerza efectiva a utilizar

$$\underline{F}(t) = -\ddot{a}_s^u \underline{E}^u - \ddot{a}_s^v \underline{E}^v \quad (98)$$

De esta forma la ecuación del movimiento es

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \underline{F}(t) \quad (99)$$

para cuya resolución se puede emplear cualquiera de los procedimientos tradicionales.

El método de la subestructuración viene a cubrir la necesidad de disponer de un procedimiento que ponga especial énfasis en la obra de ingeniería.

Ello se consigue considerando el terreno como una subestructura y usando las soluciones en la modificación de las ecuaciones de la otra subestructura que es la obra. Como ambas labores se realizan por separado, pueden afinarse hasta el grado apropiado a cada subestructura.

Ello permite por ejemplo utilizar las soluciones de elasticidad tradicional en el estudio del medio o bien recurrir al F.E.M. cuando aquello no sea posible. El estudio de la obra, por otro lado, se puede afinar todo lo que se desee una vez que se ha conseguido la solución para el medio.

REFERENCIAS

- AKINO, OTA, YAMAHARA: "Seismic Observation of Rigid structures on various soils and its Review". Proc. 4th. World Conference on Earthquake Engineering. Chile (1969)
- ROESSET: " Fundamentals of soil amplification" en "Seismic Design (1970) for Nuclear Power Plants". M.I.T. Press.
- ROESSET: " Soil amplification of earthquake" en "Numerical methods (1978) in Geotechnical Engineering". ed. Desai & Christian: Mc Graw Hill.
- HARDIN & DRNEVITCH: "Shear Modulus and Damping in Soils: Design (1972) Equations and Curves". Jour. Soil. Mech. and Found. Div. ASCE Vol 98 SM 7.
- SEED & IDRIS: " Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Res (1970) ponse Analysis". Report No. EERC 70-10 Univ. Calif. Berkeley.
- SCHNABEL, LYSMER, SEED: "SHAKE-A Computer Program for -- (1972) Earthquake Response...". Repp. No EERC 72-12 Univ. Calif. Berkeley
- KAUSEL, ROESSET, CHRISTIAN: " Nonlinear behaviour in soil -- (1976) structure interaction". Jour. of the Geotechnical Eng. Div. ASCE
- JAKUB: " Nonlinear stiffness of foundations". MIT. No. R 77-35 (1977)
- CHRISTIAN: " Un certainties in soil structure interaction" en "Struc (1975) tural Design of Nuclear Plant Facilities". Vol II ASCE
- ELSABEE y MORRAY: " Dynamic Behavior of Embedded Foundations". (1977) Pub. No. R 77-33 MIT.
- GHOSH y WILSON: " Dynamic stress analysis of axisymmetric structu (1969) res under arbitrary loading". Report. No. EERC-60-10. Univ. Calif. Berkeley.
- AGRAWAL: " SOIL-STRUCTURE interaction panel". en "Structural (1975) Design of Nuclear Plant Facilities". Vol. II ASCE.

49

WHITMAN: "SOIL-STRUCTURE interaction panel" en "Structural -
(1975) Design of Nuclear Plant Facilities". Vol. II ASCE

LYSMER, UDAKA, SEED, HWANG: "LUSH-A Computer Program for
(1974) Complex Response Analysis of
Soil-Structure Systems". Rep -
No. EERC 74-4. Univ. Calif.
Berkeley.

BERGER, LYSMER, SEED: ALUSH-A: "Computer Program for Seismic
(1975) Response Analysis of Axisime
tric Soil-Structure Systems".
Rep. No. EERC 75-31, Univ.
Calif. Berkeley.

LYSMER, UDAKA, TSAI, SEED: "FLUSH-A Computer Program for
(1975) aproximate-3-D Analysis of Soil-
Structure Systems". Rep No. EERC
75-30

WAAS: "Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics -
(1972) Problems in Semi-Infinite layered Media". Ph. D. The
sis . University of Calif. Berkeley.

KAUSEL: "Forced Vibrations of circular Foundations on Layered
(1974) Media" Report R74-11 MIT